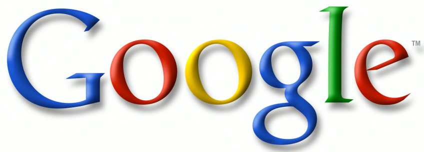


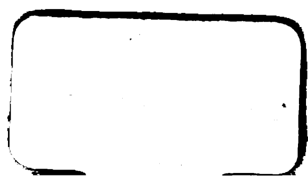
LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET

LE MAGNÉTISME



LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET

LE MAGNÉTISME

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET

LE MAGNÉTISME

PAR

É. MASCART

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE,
DIRECTEUR DU BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE

ET

J. JOUBERT

PROFESSEUR AU COLLÈGE ROLLIN.

TOME I

PHÉNOMÈNES GÉNÉRAUX ET THÉORIE

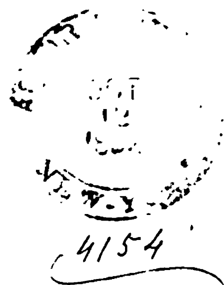
PARIS

G. MASSON, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, Boulevard Saint-Germain

M DCCC LXXXII


4154

PRÉFACE

Cet ouvrage a pour point de départ les leçons professées par l'un de nous pendant plusieurs années au Collège de France. Il comprendra deux parties : la première, principalement théorique, qui forme le présent volume ; la seconde, d'un caractère plus expérimental, dans laquelle nous examinerons les différents phénomènes, les méthodes de mesure et les principales applications.

Ce mode d'exposition nous a paru présenter de grands avantages. Les phénomènes, en effet, sont presque toujours fort complexes, surtout quand il s'agit d'électricité, et l'intelligence de tous les détails qu'ils comportent exige souvent des connaissances plus étendues que celles dont il a été question dans les chapitres auxquels on les rattache par leur caractère dominant. L'interprétation des expériences sera donc singulièrement facilitée par l'exposé antérieur des principes généraux de la science.

Après avoir rappelé et coordonné les faits qui servent à l'établissement de la théorie, nous en avons étudié les conséquences mécaniques. Ce premier volume constitue ainsi un ouvrage distinct et on pourrait résumer la pensée qui nous a guidés en le considérant comme un *Essai sur la Théorie mécanique de l'électricité*, si un pareil titre n'était trop ambitieux.

Nous avons cherché à mettre en relief les vues profondes introduites dans la science par Faraday, et si heureusement développées par Clerk Maxwell, sur la considération des lignes de force et sur le rôle d'un milieu intermédiaire dans les actions électriques et magnétiques. Cette conception jette un grand jour sur les relations qui existent entre les divers ordres de phénomènes et a donné naissance à une théorie de la lumière tout à fait imprévue.

Ayant surtout pour but d'être utiles aux physiciens, nous avons fait tous nos efforts pour simplifier les démonstrations, sans sacrifier la rigueur des raisonnements. Les parties que exigent une analyse d'un caractère plus élevé, et qui sont d'ailleurs faciles à distinguer, pourront être passées sans inconvénient à une première lecture; dans la plupart des cas, elles ne sont pas indispensables pour suivre le développement de la théorie.

La science de l'électricité a subi depuis quelques années une véritable transformation ; nous reconnaissons avec empressement les nombreux emprunts que nous avons faits aux travaux des savants qui ont le plus contribué à cette réforme, particulièrement aux mémoires de sir W. Thomson et à l'excellent traité de Clerk Maxwell.

20 Janvier 1882.

LEÇONS

SUR

L'ÉLECTRICITÉ

ET LE

MAGNÉTISME

PREMIÈRE PARTIE. — ÉLECTRICITÉ STATIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

1. Électrisation. — La plupart des corps acquièrent par le frottement, au moins d'une manière temporaire, la propriété d'attirer les corps légers. On dit alors qu'ils sont *électrisés*. Si le corps attiré vient au contact du corps électrisé, il finit, au bout d'un temps plus ou moins long, par être repoussé, et on constate qu'il est lui-même électrisé. Les propriétés électriques peuvent donc se transmettre d'un corps à un autre par simple contact.

Par opposition, on appelle corps à l'état naturel ou à l'état *neutre* ceux qui ne présentent pas de propriétés électriques.

2. Conducteurs, Isolants. — Sur certains corps, comme le verre, la résine, la soie, le caoutchouc, l'électricité reste localisée pendant un temps plus ou moins long aux points où

on l'a produite par frottement ou par contact. On les appelle corps *mauvais conducteurs* de l'électricité.

Sur d'autres corps, au contraire, tels que les métaux, les propriétés électriques communiquées en un point se transmettent presque instantanément en tous les points; on les appelle corps *conducteurs*. A cette dernière classe appartiennent la plupart des matériaux qui composent le sol; l'air et les vapeurs, plus généralement tous les gaz, appartiennent à la première. On ne pourra donc conserver l'électricité sur un conducteur qu'en le supportant, en l'*isolant* du sol, par un corps mauvais conducteur, tel qu'une tige de verre, de résine, de caoutchouc durci ou ébonite, des cordons de soie, etc. De là le nom d'*isolants* donné aux corps mauvais conducteurs.

En réalité la distinction des corps en conducteurs et isolants ne correspond pas à une différence essentielle de propriétés. L'électricité se propage sur tous les corps plus ou moins rapidement. On n'en connaît pas qui soient absolument isolants, c'est-à-dire sur lesquels les propriétés électriques se conservent indéfiniment sans altération.

De même, malgré la rapidité avec laquelle l'électricité se transmet sur les meilleurs conducteurs, il n'en existe pas sur lesquels la propagation soit absolument instantanée; on peut établir entre eux, à ce point de vue, des différences appréciables et déterminer la résistance particulière que chacun d'eux oppose au mouvement de l'électricité.

3. Deux électricités. — Dans le frottement mutuel de deux corps, par exemple d'un morceau de verre et d'un morceau de résine, tous deux s'électrisent, mais avec des caractères différents : chacun d'eux repousse un corps léger isolé qu'il a touché lui-même et qui a partagé son électricité; mais la résine attire le corps touché par le verre, et le verre le corps touché par la résine.

L'état du verre est donc autre que celui de la résine, ce que l'on exprime en disant que l'électricité du verre est d'*espèce différente* de celle de la résine. L'expérience montre d'ailleurs que tout corps électrisé se comporte ou comme le verre ou comme la résine de l'expérience précédente. Il attire, par exemple, le corps électrisé par le verre et repousse celui qui

a été électrisé par la résine, ou inversement. Il y a donc deux espèces d'électricités, et il n'y en a que deux. On peut résumer cette propriété fondamentale en disant que *deux corps chargés de même électricité, se repoussent et que deux corps chargés d'électricités différentes s'attirent.*

4. Actions électriques. — Masses électriques. — L'action qui s'exerce entre deux corps électrisés, de petites dimensions eu égard à la distance qui les sépare, est dirigée suivant la droite qui les joint.

Coulomb a vérifié directement que *cette force est en raison inverse du carré de la distance.* Elle est aussi fonction de l'état électrique des corps en présence, ou de leur *électrisation.*

Si, entre deux corps identiques de très petites dimensions et placés à l'unité de distance, l'action électrique est égale à l'unité de force, on dit que la *quantité d'électricité* ou la *masse électrique* de chacun d'eux est égale à l'unité.

Si, l'état de l'un des corps restant invariable, ainsi que la distance, l'action réciproque devient 2, 3, ... fois plus grande, on dit que la masse électrique du second est devenue elle-même 2, 3, ... fois plus grande.

La masse électrique d'un corps est donc, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à la force qu'il exerce sur un corps extérieur situé à une grande distance par rapport à ses dimensions, et l'action réciproque de deux corps électrisés est proportionnelle au produit de leurs masses électriques.

5. — Lorsque deux corps, par exemple deux disques, l'un de verre, l'autre de métal, le disque de métal étant isolé, après avoir été frottés l'un contre l'autre, sont maintenus en contact, l'ensemble se comporte vis-à-vis de tout corps extérieur, électrisé ou non, comme s'il était à l'état neutre. Cependant les propriétés électriques développées par le frottement n'ont pas disparu, puisqu'il suffit de séparer les deux disques pour constater qu'ils sont électrisés tous deux. Les actions des deux corps au contact sont donc égales et de signes contraires. De là cette double conséquence :

Par leur frottement réciproque deux corps prennent des quantités d'électricité égales et d'espèces différentes ;

La loi suivant laquelle l'action varie avec la distance est la même pour les deux électricités.

6. Signes des masses électriques. — On est ainsi amené à considérer les masses électriques d'espèces différentes comme des quantités de même nature et de signes contraires. Lorsqu'une surface fermée renferme des masses d'espèces différentes, l'action exercée sur une masse extérieure égale à l'unité, et située à une grande distance par rapport aux dimensions de la surface considérée, est proportionnelle à la différence des masses électriques de chaque espèce, et attractive ou répulsive suivant l'espèce qui domine. En affectant ces masses des signes + et —, on peut dire que l'action résultante est proportionnelle à la somme algébrique des masses électriques renfermées dans la surface, et répulsive ou attractive suivant le signe de cette somme.

L'usage s'est établi de prendre comme *positive* l'électricité développée sur le verre frotté avec de la résine, et, comme *négative*, l'électricité acquise en même temps par la résine.

7. Force électrique. — Entre deux corps de petites dimensions séparés par une distance r et chargés de masses m et m', l'action a donc pour expression

$$f = \frac{mm'}{r^2}.$$

Cette expression est positive si les deux masses sont de même signe, et la force est alors une répulsion. C'est une attraction dans le cas contraire.

Si une masse m est en présence de corps électrisés quelconques, on peut considérer comme évident que l'action totale qu'elle éprouve est la résultante de toutes les actions qu'exercerait sur elle chacune des masses élémentaires considérées isolément, soit que ces masses appartiennent à des corps distincts, soit qu'elles fassent partie de la charge d'un même corps.

Pour abréger le langage, nous appellerons *force électrique en un point*, la résultante de toutes les actions qui s'exerceraient sur une masse d'électricité positive, égale à l'unité, placée en ce point.

8. Partage des masses. — Coulomb a vérifié directement que, lorsqu'une sphère conductrice électrisée est mise en contact avec une sphère identique à l'état neutre, chacune d'elles possède ensuite une masse électrique égale à la moitié de la masse primitive, c'est-à-dire qu'agissant isolément, chacune d'elles exerce sur un corps électrisé extérieur et à la même distance une action moitié moindre que celle de la sphère dans son état primitif. Si la seconde sphère, au lieu d'être à l'état neutre, est elle-même électrisée avant le contact, les charges finales sont encore égales entre elles; chacune d'elles est la moitié de la somme algébrique des masses primitives, de telle sorte qu'elle est nulle et que les corps se retrouvent à l'état naturel, si les charges primitives étaient égales et de signes contraires.

Il en serait encore de même pour deux conducteurs identiques de forme quelconque, que l'on ferait toucher l'un par l'autre, à la condition qu'ils soient symétriques par rapport au point de contact.

Si la condition de symétrie n'est pas remplie, les charges cessent d'être égales; mais leur somme algébrique reste toujours égale à la masse primitive. Le fait est d'ailleurs général et s'applique à un nombre quelconque de corps: de quelque manière qu'on les mette en relation les uns avec les autres, et à la condition qu'aucun des conducteurs du système considéré ne soit mis, à un moment quelconque, en communication avec le sol, la somme algébrique des masses électriques du système demeure invariable.

9. Électricité de contact. — Volta a découvert ce fait capital que le contact de deux métaux différents primitivement à l'état naturel, ou plus généralement de deux corps quelconques à la même température, suffit pour les constituer dans deux états électriques différents et les charger respectivement de quantités égales d'électricités de signes contraires.

Le frottement n'est qu'une forme particulière de contact. La cause qui produit l'électricité paraît donc être la même dans les deux cas.

Il résulte de la découverte de Volta que deux sphères con-

ductrices de même rayon n'auront des charges égales, après avoir été mises en contact, que si elles sont de nature identique et à la même température. Mais rien n'est changé à la proposition fondamentale que la somme algébrique des charges est la même avant et après le contact.

10. Électrisation par influence. — Induction. — Lorsqu'un corps primitivement à l'état neutre est placé dans le voisinage de corps électrisés, il devient lui-même électrisé ; le phénomène est désigné sous le nom d'*électrisation par influence* ou *induction*. Si le corps soumis à l'influence est isolé, sa masse électrique totale, d'après ce qu'on vient de voir, doit rester nulle; il se chargera donc de deux masses égales et de signes contraires distribuées suivant une certaine loi. Le phénomène de l'induction précède toujours l'attraction d'un corps à l'état neutre par un corps électrisé, et l'action qui s'exerce entre les deux corps est simplement celle des masses électriques en présence. On peut donc considérer comme un fait expérimental qu'il n'y a jamais d'action directe que celle de masses électriques sur d'autres masses électriques.

11. Équilibre électrique. — Le caractère essentiel de l'induction est que l'électricité se produit en tout point d'un conducteur où s'exerce une force électrique. L'équilibre ne peut donc exister pour un corps conducteur que si la force électrique est nulle en chacun de ses points; l'électricité qu'il possède exerce en chaque point de son étendue une action égale et de signe contraire à celle des masses extérieures.

La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre électrique dans un système de corps conducteurs, isolés ou non, est donc que *la force électrique soit nulle en un point quelconque de chacun d'eux*.

12. Diélectriques. — Il ne peut, par suite, y avoir de force électrique, à l'état d'équilibre, que dans les corps mauvais conducteurs ou isolants. C'est pour cette raison que Faraday a donné à ces corps le nom de *diélectriques*, pour rappeler que ce sont des corps dans lesquels les forces électriques peuvent exister ou se propager.

13. Localisation de l'électricité à la surface des conducteurs. — Les expériences de Cavendish et de Coulomb ont montré que, dans tout système électrique en équilibre, *les conducteurs n'ont d'électricité qu'à leur surface extérieure.* La surface de toute cavité fermée, creusée dans le conducteur et ne renfermant pas de masses électriques, est dépourvue d'électricité, et la force électrique est nulle dans toute l'étendue de la cavité. Nous verrons que cette propriété fondamentale n'est compatible qu'avec la loi du carré des distances.

14. Induction sur un conducteur fermé. — Cette localisation de l'électricité à la surface des conducteurs conduit à plusieurs conséquences importantes.

Lorsqu'un conducteur est électrisé *par influence*, chacune des couches positives et négatives dont il se trouve chargé forme une masse inférieure, ou au plus égale, à celle du corps influent ou *inducteur*. Quand le conducteur influencé ou *induit* entoure complètement l'inducteur, la couche électrique extérieure est de même espèce que celle de l'inducteur, et la charge en chaque point est indépendante de la position de ce dernier. Rien n'est changé, quand même l'inducteur vient à toucher la surface interne; mais alors, s'il est aussi conducteur, il ne forme plus avec l'induit qu'une masse conductrice unique, et la surface interne ne garde aucune trace d'électricité. Il y avait donc à l'intérieur de l'induit une couche électrique égale et de signe contraire à celle de l'inducteur, et, par suite, sur la surface externe, une couche égale et de même signe.

La quantité d'électricité induite par un corps électrisé sur un conducteur qui l'entoure complètement est donc égale à la quantité d'électricité inductrice. Cette propriété est encore vraie si le corps influent est mauvais conducteur, et plus généralement, si les masses électriques influentes sont distribuées d'une manière quelconque dans la cavité du conducteur fermé.

15. Addition des charges. — Nous avons vu plus haut qu'on peut diviser en deux la charge électrique d'un conducteur. On peut de même ajouter sur un conducteur des masses

électriques quelconques. Il suffit que le conducteur présente une cavité presque entièrement fermée permettant d'introduire des conducteurs électrisés et de transmettre par contact, à la surface extérieure, l'électricité dont ils sont chargés.

16. — On peut donc à volonté augmenter ou diminuer la somme algébrique des masses électriques contenues à l'intérieur d'une surface fermée, à la condition d'y introduire ou d'en faire sortir des masses positives ou négatives. Mais il est important de remarquer que, si aucune masse ne traverse la surface dans un sens ou dans l'autre, il est impossible, quelles que soient les actions auxquelles on soumette les corps qu'elle renferme, frottement, induction, contact, actions physiques ou chimiques, de modifier la quantité totale d'électricité du système. On ne peut ni créer ni détruire, sur un corps quelconque, une quantité déterminée d'électricité, sans qu'il y ait, en même temps, sur le même corps ou sur un autre, création ou destruction d'une quantité égale d'électricité de signe contraire.

17. Hypothèses sur la nature de l'électricité. — L'électricité, définie et mesurée comme on l'a dit plus haut, est une grandeur d'une nature particulière parfaitement déterminée au point de vue mécanique, affectée d'un signe comme une quantité de mouvement, et la théorie des phénomènes peut être établie, d'après les lois expérimentales, sans le secours d'aucune hypothèse. A cause de la facilité avec laquelle l'électricité se propage dans les conducteurs, on l'a souvent assimilée à un fluide, comme on expliquait autrefois les effets de conductibilité calorifique par la propagation d'un fluide spécial. Quant au caractère de dualité que présentent les phénomènes électriques, on en a rendu compte de deux manières.

D'après Franklin, un corps à l'état naturel renferme une quantité normale de fluide électrique, et il devient électrisé positivement ou négativement suivant que, par l'action de corps extérieurs, on a augmenté ou diminué sa charge de fluide. Les attractions et les répulsions des corps s'expliquent alors par la répulsion mutuelle des fluides et par l'attraction qu'ils exercent sur les masses pondérables.

L'hypothèse des deux fluides, imaginée par Symmer et

adoptée par Coulomb, au moins à titre provisoire, consiste à admettre qu'il y a deux fluides différents, que les molécules d'un même fluide se repoussent, que les fluides différents s'attirent et qu'enfin, dans un corps à l'état naturel, il y a des quantités équivalentes des deux fluides formant le fluide neutre. Un corps serait électrisé positivement ou négativement suivant qu'il contiendrait un excès de l'un ou de l'autre fluide. Les attractions et les répulsions s'expliquent de même par les actions qui s'exercent entre les fluides et la matière pondérable.

Le moindre défaut de ces hypothèses est qu'elles sont superflues. Comme, d'ailleurs, rien ne semble marquer dans les expériences qu'il y ait une limite à l'électrisation des corps, on est conduit à admettre que la charge normale d'un corps dans la théorie de Franklin, ou que la masse de fluide neutre dans la théorie des deux fluides, est illimitée, conséquence qui est évidemment contradictoire avec la notion même d'un fluide matériel.

Un certain nombre des expressions employées dans l'étude de l'électricité ont pour origine l'idée des fluides ; il n'y a pas d'inconvénient sérieux à les conserver, si l'on a soin de les définir par les propriétés mathématiques et expérimentales auxquelles elles correspondent, dans le but, comme l'écrivait Coulomb, « de présenter, avec le moins d'éléments possible, les résultats du calcul et de l'expérience, et non d'indiquer les véritables causes de l'électricité (1). »

18. Densité électrique. — C'est ainsi que l'idée de fluide a conduit à la notion de la densité électrique. Si l'électricité occupe toute l'étendue d'un corps, dans le cas d'un diélectrique, par exemple, et qu'elle y soit distribuée d'une manière uniforme, on appelle *densité électrique*, la quantité d'électricité définie, comme plus haut, qui existe dans l'unité de volume. Si la distribution est irrégulière, la densité en un point est le rapport qui existe entre la charge électrique d'un élément de volume en ce point et le volume lui-même.

Les corps conducteurs n'ont d'électricité qu'à la surface. Si

(1) *Histoire de l'Académie des sciences pour* 1788, p. 673.

la distribution est uniforme, la densité superficielle est la quantité d'électricité qui existe sur l'unité de surface. Dans le cas d'une distribution quelconque, la densité superficielle en un point est le rapport de la charge d'un élément de surface pris autour de ce point à l'étendue de l'élément.

Dans l'hypothèse des fluides, il faut bien admettre que la couche électrique superficielle a une épaisseur et qu'elle pénètre jusqu'à une certaine profondeur, si petite qu'on le voudra, dans le conducteur ou dans le milieu diélectrique qui l'entoure. L'expérience ne permettant pas de déterminer l'épaisseur de cette couche, on peut, toujours dans le même ordre d'idées, ou supposer la densité variable avec l'épaisseur constante, ou la densité constante avec l'épaisseur variable ; dans ce cas, les expressions de *densité électrique* et d'*épaisseur électrique en un point* sont équivalentes.

On voit que, abstraction faite de toute idée de fluide, les expressions de densité électrique en volume ou densité superficielle, ont une signification purement mathématique ou expérimentale, indépendante de toute hypothèse.

CHAPITRE DEUXIÈME

DU POTENTIEL

19. — Nous admettrons d'abord, conformément à l'expérience, que l'action de deux corps électrisés de petites dimensions est dirigée suivant la droite qui les joint et ne varie qu'avec leur distance, en un mot qu'elle satisfait à la définition des forces dites *centrales;* enfin, qu'elle est proportionnelle, par définition (1), au produit des quantités d'électricité que possèdent les deux corps.

Nous admettrons en outre, comme évident, que l'action réciproque de deux corps électrisés de dimensions finies est la résultante des actions qui s'exercent, suivant la même fonction des distances, entre les masses élémentaires qui constituent leur charge.

20. Champ électrique. — On donne le nom de *champ électrique* à toute l'étendue de l'espace dans lequel se fait sentir l'action du système électrique que l'on envisage. Un champ électriqne est généralement indéfini ; il peut aussi être limité, par exemple, dans le cas où les masses agissantes sont toutes comprises à l'intérieur d'un conducteur entièrement fermé. Pour des masses données de grandeur et de position, la force électrique en chaque point du champ est fonction seulement des coordonnées du point.

A l'état d'équilibre, la force est nulle dans tous les conducteurs; le champ électrique ne comprend donc pas les volumes des corps conducteurs, il est formé des espaces intermédiaires occupés par un milieu isolant ou *diélectrique.*

21. Lignes de force. — Une *ligne de force* dans le champ électrique est une ligne tangente en chaque point à la direction de la force. Une pareille ligne est évidemment continue tant qu'elle ne rencontre pas de masses agissantes.

22. Définition du potentiel. — Considérons un système en équilibre et supposons que, toutes les masses agissantes étant fixées dans les positions qu'elles occupent, on déplace de A en B une masse d'électricité positive égale à l'unité. Le travail des forces électriques qui correspond à ce déplacement est indépendant du chemin suivi pour aller de A en B. C'est la conséquence de l'hypothèse (19) que les forces sont *centrales;* on voit d'ailleurs que, s'il en était autrement, on pourrait, en faisant circuler une masse électrique par des chemins convenables, entre les deux points A et B, produire une quantité indéfinie de travail, sans dépense équivalente. Le travail considéré ne dépend donc que des coordonnées des points A et B; il est égal à la différence des valeurs V_A et V_B que prend une même fonction V en ces deux points et l'on peut écrire, en représentant par W_A^B ce travail,

$$(1) \qquad W_A^B = V_A - V_B.$$

La fonction V joue un rôle capital dans l'étude des phénomènes électriques; on l'a appelée *potentiel*. Comme cette fonction n'est définie que par une intégrale, la valeur n'en est déterminée qu'à une constante près et les variations sont mesurées par le travail électrique.

D'après l'équation (1), *l'excès du potentiel en un point* A *sur le potentiel en* B *est égal au travail accompli par les actions électriques sur l'unité de masse qui irait de* A *en* B ; *ou inversement, c'est le travail qu'il faudrait dépenser contre les forces électriques pour amener cette masse de* B *en* A.

Si l'unité de masse se meut le long d'une ligne de force, le travail pour un déplacement infiniment petit ds est $F\,ds$, et le travail total de A en B a pour expression

$$(2) \qquad W_A = \int_A^B F\,ds.$$

23. Surfaces de niveau. — Force électromotrice. — On appelle *surface de niveau* une surface normale en chaque point à la direction de la force, c'est-à-dire une surface normale à toutes les lignes de force qu'elle rencontre. Dans le cas des forces centrales, on peut toujours mener par un point quelconque une surface satisfaisant à cette condition. Si une masse électrique se meut sur une surface de niveau, le travail élémentaire est constamment nul, puisque la force est toujours normale au déplacement. Le potentiel a donc la même valeur pour tous les points d'une même surface de niveau.

Considérons deux surfaces de niveau S_1 et S_2 dont les potentiels sont respectivement V_1 et V_2. Le travail qui correspond au déplacement de l'unité de masse d'un point de la première à un point de la seconde, a pour valeur $V_1 - V_2$; il est indépendant du chemin parcouru et même de la position du point de départ et du point d'arrivée sur les deux surfaces.

Pour une masse m d'électricité allant de la surface du niveau S_1 à la surface S_2, le travail est $m\,(V_1 - V_2)$. Le travail électrique, comme celui de la pesanteur sur un corps qui tombe, se présente sous la forme d'un produit de deux facteurs, l'un m qui correspond au poids du corps, et l'autre $V_1 - V_2$ à la hauteur de chute.

Quand une masse électrique positive est abandonnée à elle-même, elle tend à marcher suivant une ligne de force vers les points où le potentiel est plus faible; l'électricité négative marcherait vers les hauts potentiels.

Si les masses électriques sont distribuées sur des corps diélectriques, elles ne peuvent se déplacer qu'en entraînant avec elles le diélectrique lui-même. Les corps conducteurs, au contraire, sont caractérisés par la propriété de laisser un libre passage aux masses électriques, lesquelles se portent à la surface et s'y distribuent de manière à assurer l'équilibre.

Dans tous les cas, la différence du potentiel $V_1 - V_2$ peut être considérée comme la cause qui produit le mouvement des masses électriques; on la désigne souvent sous le nom de *force électromotrice*.

24. Expression de la force en fonction du potentiel. — Considérons deux surfaces de niveau infiniment voisines S et S',

dont les potentiels sont V et V′ (fig. 1). Au point M de la première surface la force est F; si dn désigne la distance des deux surfaces comptée suivant la normale, le travail produit par cette force sur l'unité de masse qui irait de M en M′ est égal à $F dn$. On a donc l'équation

$$F dn = V - V' = -dV,$$

qui donne,

$$F = -\frac{dV}{dn}. \tag{3}$$

Ainsi, *la force en un point est égale et de signe contraire à la dérivée du potentiel par rapport à la normale à la surface de niveau qui passe en ce point.*

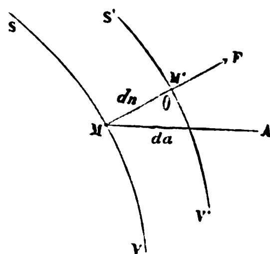


Fig. 1

Les composantes de la force par rapport à un axe quelconque jouissent de la même propriété. Menons, en effet, par le point M une droite MA faisant avec la normale un angle θ, et désignons par da la portion de cette droite interceptée par les deux surfaces S et S′. La composante F_a de la force F parallèle à la droite MA a pour expression

$$F_a = F \cos\theta = -\frac{dV}{dn} \cos\theta.$$

La figure donne d'ailleurs

$$dn = da \cos\theta;$$

on en déduit

$$F_a = -\frac{dV}{dn}\cdot\frac{dn}{da} = -\frac{\partial V}{\partial a}.$$

Ainsi, *la composante de la force suivant une direction quelconque est égale et de signe contraire à la dérivée partielle du potentiel suivant cette même direction.*

Si l'on considère trois axes rectangulaires, les composantes X, Y et Z de la force F parallèles aux axes sont

$$(4)\qquad \begin{cases} X = -\dfrac{\partial V}{\partial x}, \\ Y = -\dfrac{\partial V}{\partial y}, \\ Z = -\dfrac{\partial V}{\partial z}; \end{cases}$$

il en résulte,

$$(5)\qquad F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

25. Équilibre des conducteurs. — Dans l'intérieur d'un conducteur en équilibre la force est nulle (11). On a donc, pour toute l'étendue des conducteurs,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

et, par suite,

$$V = \text{const.}$$

D'après cela, *le volume entier d'un conducteur en équilibre est à un même potentiel;* c'est ce qu'on pourrait appeler un *volume de niveau.* Sa surface étant alors une surface de niveau, la force est normale en chacun de ses points; par conséquent, *toutes les lignes de force émanent normalement des conducteurs et y aboutissent normalement.*

26. Valeur numérique du potentiel. — Dans tous les phénomènes, les niveaux électriques n'interviennent que par les

différences et non par les valeurs absolues des potentiels correspondants. On peut donc ajouter à ces potentiels une constante quelconque.

Dans l'expression

$$W_1^2 = V_1 - V_2,$$

qui détermine le travail correspondant au déplacement d'une unité d'électricité d'une surface de niveau V_1 à une surface de niveau V_2, supposons que la surface de niveau V_2 soit le sol et que nous convenions de prendre son potentiel égal à zéro, nous aurons simplement

$$W_1^0 = V_1.$$

La valeur numérique du potentiel en un point quelconque est le nombre d'unités de travail qui correspond au déplacement d'une unité d'électricité positive depuis ce point jusqu'au sol par un chemin quelconque. Le signe du potentiel est celui du travail des forces électriques dans ce déplacement.

En d'autres termes, le potentiel en un point est le travail qu'il faudrait dépenser pour amener en ce point, depuis la surface du sol ou d'un corps quelconque communiquant au sol, une masse électrique égale à l'unité.

27. Potentiel dans le cas de la loi du carré des distances. — Nous avons jusqu'à présent laissé indéterminée la loi suivant laquelle l'action des masses électriques varie avec la distance. Nous admettrons désormais que cette loi est l'*inverse du carré de la distance*, conformément aux expériences de Coulomb. Dans ce cas, le potentiel s'exprime simplement en fonction des masses et des distances.

Supposons d'abord que le système électrique se réduise à une masse $+m$ placée en un point O (fig. 2). Si une masse égale à l'unité, située au point M, à une distance r de la première, se déplace de MM′ ou ds suivant une courbe quelconque dont la tangente MT fait l'angle α avec la direction de la force, le travail élémentaire correspondant est

$$dW = F ds \cos\alpha = F dr;$$

comme la force a pour expression

$$F = \frac{m}{r^2},$$

il vient

$$dW = \frac{m}{r^2} dr = -m d\frac{1}{r} = -d\frac{m}{r}.$$

Le travail relatif au déplacement de l'unité de masse de A en B est, en appelant r_1 et r_2 les distances OA et OB,

$$\underline{W}_A^B = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}.$$

Si l'on compare cette équation à l'équation (1), on reconnaît

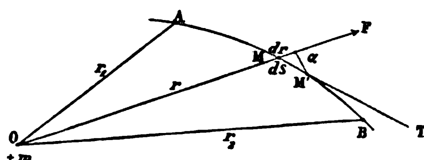


Fig. 2

que les deux termes $\frac{m}{r_1}$ et $\frac{m}{r_2}$ représentent respectivement, à une constante près, la valeur du potentiel en A et en B; par suite, le potentiel d'une masse unique m en un point situé à la distance r est égal, à une constante près, à $\frac{m}{r}$, c'est-à-dire au quotient de la masse agissante par sa distance au point considéré.

Supposons maintenant qu'il y ait plusieurs masses agissantes $m, m', m'', \ldots$, le travail total relatif au déplacement de l'unité d'électricité est égal à la somme algébrique des travaux partiels qui correspondent à chacune des masses; on aura donc, en désignant par $\sum \frac{m}{r_1}$ la somme des quotients des différentes masses par leurs distances au point de départ A et par

$\sum\frac{m}{r_2}$ la somme analogue pour le point d'arrivée B,

$$W_A^B=\sum\frac{m}{r_1}-\sum\frac{m}{r_2}=V_A-V_B.$$

Si le point B communique avec le sol, le potentiel V_B est égal à zéro. D'autre part, l'expression $\sum\frac{m}{r_2}$ devient nulle si le point B est très éloigné des masses considérées, qu'il soit pris dans l'air ou sur le sol; comme le sol, en tant que conducteur en équilibre, a partout le même potentiel, cette expression, qui renferme implicitement les masses relatives

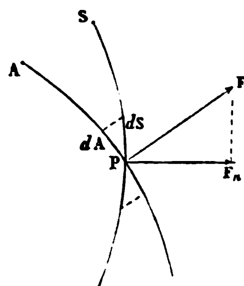


Fig. 3

à l'électricité induite, est aussi nulle sur le sol. La valeur de V_A se réduit alors à $\sum\frac{m}{r}$.

On a donc, d'une manière générale, pour l'expression du potentiel V en un point quelconque M du champ,

$$V=\sum\frac{m}{r}. \qquad (6)$$

Ainsi, *le potentiel en un point est égal à la somme des quotients obtenus en divisant chacune des masses agissantes par sa distance au point considéré.*

27. Des flux de force. — Soit A (fig. 3) une surface de niveau et dA un élément de cette surface au point P. Menons

par le contour de cet élément les lignes de force correspondantes, lesquelles coupent à angle droit toutes les surfaces de niveau successives. Un canal orthogonal limité ainsi par des lignes de force s'appelle un *tube de force.*

Le tube de force élémentaire limité au contour de l'élément dA découpe sur une surface quelconque S passant par le point P un élément de surface dS.

En P la force électrique F est normale à dA; soit F_n la composante de cette force suivant la normale à la surface S; l'angle des deux forces étant égal à celui des deux éléments de surface, on a

$$\frac{F_n}{F}=\frac{dA}{dS},$$

ou

$$F dA = F_n dS.$$

Si l'on imagine qu'un liquide, à l'état de régime permanent, traverse normalement l'élément dA avec une vitesse F, le produit FdA représente le volume de liquide qui coule à travers l'élément dA pendant l'unité de temps, ou, plus brièvement, le flux de liquide correspondant à cet élément. Ce flux a encore pour expression le produit $F_n dS$ obtenu en multipliant une section quelconque du canal par la composante de la vitesse suivant la normale à cette section.

Par analogie, nous appellerons *quantité de force ou flux de force correspondant à un élément de surface, le produit* $F_n dS$ *de la surface de l'élément par la composante normale de la force en ce point.* Le flux de force par unité de surface est égal numériquement à la composante normale de la force.

Les propriétés que nous allons établir justifieront complètement cette analogie.

La notion des lignes de force est due à Faraday, et cet éminent physicien a montré tout le parti que l'on peut en tirer dans l'étude des phénomènes électriques. Faraday appelait *nombre de lignes de force* ce que nous désignons ici par les expressions *quantité* ou *flux de force.* Il nous a paru utile d'adopter une autre dénomination, d'abord pour simplifier le langage, et ensuite parce que le mot *flux* semble mieux correspondre au

caractère de continuité que présente la grandeur que l'on veut évaluer.

28. Théorème de Green. — Considérons une surface fermée entièrement convexe S (fig. 4) et soit $+m$ une masse électrique située au point O, en dehors de cette surface. Un cône infiniment délié d'ouverture $d\omega$, ayant son sommet en O, intercepte sur cette surface deux éléments dS et dS'. Soient f et f' les valeurs de la force électrique en dS et dS', dA et dA'

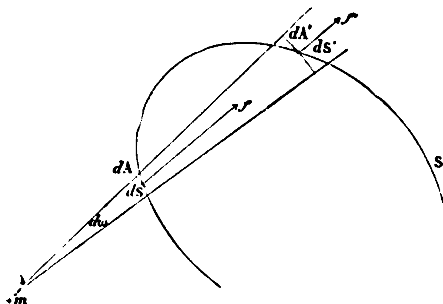


Fig. 4

les sections normales du cône correspondantes, r et r' leurs distances au point O. On a évidemment

$$fr^2 = f'r'^2 = m,$$
$$\frac{dA}{r^2} = \frac{dA'}{r'^2} = d\omega,$$

et, en multipliant ces équations membre à membre, on obtient

$$f dA = f' dA' = m d\omega;$$

mais, en vertu du théorème du flux de force, on a aussi

$$f dA = f_n dS, \qquad f' dA' = f'_n dS',$$

et, par suite,

$$f_n dS = f'_n dS' = m d\omega.$$

Si l'on convient de considérer comme positives les composantes normales dirigées vers l'extérieur de la surface, et comme négatives celles qui sont dirigées vers l'intérieur, f_n et f'_n sont de signes contraires, ce qui donne

$$f_n dS + f'_n dS' = 0.$$

Si la surface, tout en restant continue, avait des portions concaves, et si le cône considéré $d\omega$ la coupait en plus de deux points, il la rencontrerait un nombre pair de fois; le produit $f_n dS$ aurait la même valeur numérique pour chacun des éléments interceptés, mais on devrait prendre ces produits alternativement en signes contraires, et la somme algébrique serait

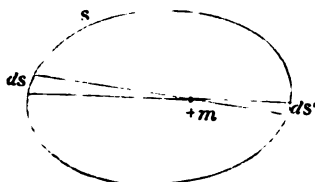


Fig. 5

encore nulle. On a donc, pour une surface quelconque fermée extérieure à la masse agissante m, l'équation

$$\int f_n dS = 0,$$

c'est-à-dire que *le flux total de force qui sort de la surface est égal à zéro.*

Si la masse agissante m est située dans l'intérieur de la surface fermée S (fig. 5), les éléments dS et dS' découpés par un cône d'ouverture $d\omega$ émanant de la masse m donnent toujours la relation

$$f_n dS = f'_n dS' = m d\omega.$$

Mais, dans le cas actuel, les composantes normales f_n et f'_n sont

de même signe. On a donc, pour la surface entière,

$$\int f_n dS = m \int d\omega = 4\pi m.$$

Donc, *le flux de force qui sort d'une surface* S *renfermant une masse agissante m est égal à* $4\pi m$. On peut dire, en d'autres termes, que *le flux total de force qui émane d'une masse m, dans toutes les directions, est égal à* $4\pi m$.

Il est évident que, si chaque nappe du cône rencontre plus d'une fois la surface, elle la rencontre un nombre impair de fois, pour lesquelles les valeurs de $f_n dS$ doivent être prises alternativement de signes contraires, et le résultat final est toujours le même.

20. — Supposons maintenant qu'il y ait des masses m, m',

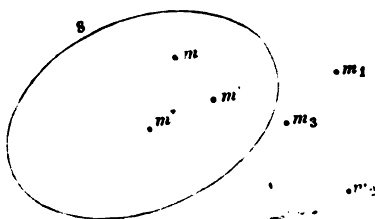


Fig. 6

m'',... comprises dans la surface S (fig. 6), et d'autres masses m_1, m_2, m_3,... à l'extérieur.

En chaque point de la surface, la composante normale F_n de la force résultante F est égale à la somme algébrique des composantes normales des forces émanant de toutes les masses agissantes, tant intérieures qu'extérieures.

En désignant par $\sum_e f_n$ la somme en un point des composantes normales qui proviennent des masses extérieures et par $\sum_i f_n$ la somme des composantes relatives aux masses intérieures, le flux total de force qui sort de la surface S a pour expression

$$\int F_n dS = \int \sum_e f_n dS + \int \sum_i f_n dS.$$

Comme le flux de force est nul pour chacune des masses extérieures, il en résulte

$$\int \sum_e f_n dS = 0.$$

Pour chaque masse intérieure, au contraire, on a

$$\int f_n dS = 4\pi m,$$

et, par suite,

$$\int \sum_i f_n dS = 4\pi \sum m = 4\pi M,$$

M étant la somme algébrique de toutes les masses intérieures.

Il reste finalement

$$\int F_n dS = 4\pi M. \tag{7}$$

Ainsi, *pour toute surface fermée tracée d'une manière quelconque dans un champ électrique, le flux total de force qui sort de la surface, c'est-à-dire l'excès du flux des forces qui sortent sur le flux des forces qui entrent, est égal à la quantité d'électricité comprise dans la surface multipliée par* 4π.

Si l'on désigne par i l'angle de la direction de la force F en un point de la surface avec la normale, la composante normale a pour expression

$$F_n = F \cos i.$$

En appelant a la normale à la surface de niveau qui passe par le point considéré, et n la normale à la surface S comptée vers l'extérieur, on a d'ailleurs

$$F = -\frac{dV}{da} \quad \text{et} \quad F_n = -\frac{\partial V}{\partial n};$$

de sorte que le théorème précédent peut être exprimé analy-

tiquement par l'une ou l'autre des équations

$$(8)\qquad \begin{aligned} -\int \frac{dV}{da}\cos i\, dS &= 4\pi M, \\ -\int \frac{\partial V}{\partial n} dS &= 4\pi M, \end{aligned}$$

qui sont dues à Green.

20. Équations de Laplace et de Poisson. — Soient X, Y et Z les composantes de la force en un point P dont les coordonnées sont x, y, et z, et considérons l'élément de volume $dx dy dz$.

Si le milieu renferme des masses agissantes distribuées d'une manière continue et que dM soit la masse totale contenue dans l'élément, on a, en désignant par ρ la densité,

$$dM = \rho dx dy dz.$$

Le flux de force qui entre par la surface $dy dz$ passant par le point P est

$$X dy dz;$$

le flux qui sort par la face opposée est

$$\left(X + \frac{\partial X}{\partial x} dx\right) dy dz.$$

L'excès du flux qui sort est égal à

$$\frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx dy dz.$$

En répétant le même raisonnement pour les autres coordonnées, on voit que le flux total de force qui sort de l'élément de volume a pour expression

$$-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx dy dz.$$

En vertu du théorème précédent, cet excès est égal au pro-

duit de 4π par la masse totale d'électricité comprise dans le volume, ce qui donne l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho.$$

On représente habituellement par ΔV la somme des trois dérivées secondes partielles du potentiel par rapport aux coordonnées. On peut donc écrire :

(9) $$\Delta V=-4\pi\rho.$$

Si l'élément de volume n'est pas électrisé, $\rho=0$ et l'équation se réduit à

(10) $$\Delta V=0.$$

Ainsi, *la somme en un point des trois dérivées secondes partielles du potentiel, par rapport à trois axes rectangulaires, est égale et de signe contraire au produit de 4π par la densité de la masse agissante en ce point.*

Cette somme est nulle quand il n'y a pas d'électricité au voisinage du point.

Ce théorème des dérivées secondes avait été énoncé d'abord par Laplace, sous la dernière forme, dans ses travaux sur l'attraction universelle. Poisson l'a complété en montrant qu'il est nécessaire de tenir compte de la densité de la masse agissante au point considéré.

21. — Supposons, en particulier, que l'on prenne pour axe des z la normale à la surface de niveau, de sorte que les axes des x et des y soient dans le plan tangent.

Le flux de force étant nul parallèlement à la surface, on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.$$

S'il n'y a pas d'électricité au point considéré, il résulte aussi du théorème précédent

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

Ainsi, la dérivée seconde partielle du potentiel est nulle dans toute direction tangente à une surface de niveau. Elle est encore nulle par rapport à la normale s'il n'y a pas d'électricité au point considéré.

32. Distribution de l'électricité à la surface des conducteurs. — Le théorème de Poisson permet de démontrer cette propriété fondamentale que *dans tout conducteur en équilibre il n'existe d'électricité qu'à la surface.*

Nous avons vu, en effet, que la force est nulle dans un conducteur en équilibre et que, par suite, le potentiel a une valeur constante dans toute l'étendue des conducteurs. Les dérivées de tout ordre du potentiel sont nulles en chaque point; on a donc

$$\Delta V = 0,$$

et, par suite,

$$\rho = 0.$$

Ainsi, à l'intérieur d'un conducteur en équilibre, non seulement il n'y a pas de force électrique, mais il n'y a pas d'électricité. La distribution est purement superficielle.

33. Formule de Green. — Le théorème relatif au flux de force nous a donné, pour une surface fermée, l'équation

$$-\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = 4\pi M.$$

La masse M intérieure à la surface est égale à la somme des masses ρdv comprises dans les différents éléments de volume; on a donc, en tenant compte de l'équation (9),

$$(11) \qquad \int \frac{\partial V}{\partial n} dS = -\int 4\pi\rho dv = \int \Delta V dv.$$

Cette équation est un cas particulier d'une formule plus générale due à Green.

Soient U et V deux fonctions finies et continues de x, y et z. Posons encore

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

et considérons l'intégrale

$$\int U\Delta V dv = \iiint U\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz,$$

étendue au volume enveloppé par une surface fermée S. Cette intégrale se compose de trois termes de la forme

$$\iiint U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\,dy\,dz = \iint dy\,dz \int U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx.$$

En intégrant cette expression par parties, on obtient

$$\iint dy\,dz \int U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx = \iint U\,\frac{\partial V}{\partial x} dy\,dz - \iiint \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} dx\,dy\,dz.$$

Dans le second membre l'intégrale doit être étendue, pour le premier terme, à toute la surface S, et, pour le second, au volume limité par cette surface. En opérant de même pour les autres coordonnées, la somme des intégrales relatives à la surface S sera

$$\iint U\left(\frac{\partial V}{\partial x} dy\,dz + \frac{\partial V}{\partial y} dz\,dx + \frac{\partial V}{\partial z} dx\,dy\right).$$

Or, si l'on considère V comme un potentiel, ce qui n'enlève rien à la généralité de la démonstration, l'expression $-\frac{\partial V}{\partial x}dy\,dz$, ou $X dy\,dz$, représente le flux de force traversant l'élément de surface $dy\,dz$, c'est-à-dire la projection d'un élément dS de la surface sur un plan perpendiculaire à l'axe de x. Il en est de même pour les autres termes, de sorte que la parenthèse représente, au signe près, le flux de force qui traverse cet élément de surface. Cette parenthèse est donc égale à $-F_n dS$, ou $\frac{\partial V}{\partial n} dS$, et l'on a finalement la *formule de Green :*

$$(12)\quad \int U\Delta V dv = \int U\frac{\partial V}{\partial n} dS - \int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\right) dv.$$

En y faisant $U=1$, on retrouve l'équation précédente (11).
Lorsque les fonctions U et V sont identiques, il vient

$$(13)\quad \int V\Delta V\,dv=\int V\frac{\partial V}{\partial n}dS-\int\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dv.$$

Si la fonction V représente le potentiel d'un système électrique, la force F est déterminée par l'équation,

$$F^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

ce qui donne

$$(14)\quad \int V\Delta V\,dv=\int V\frac{\partial V}{\partial n}dS-\int F^2dv,$$

ou, d'après le théorème de Poisson,

$$(15)\quad 4\pi\int V\rho\,dv=-\int V\frac{\partial V}{\partial n}dS+\int F^2dv.$$

24. Des tubes de force. — Nous avons vu qu'un tube de force

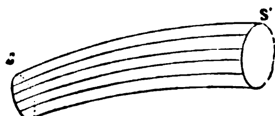


Fig. 7

est un canal orthogonal aux surfaces de niveau, limité latéralement par des lignes de force.

Considérons un tube de force terminé par deux surfaces quelconques S et S' (fig. 7), et appliquons l'équation (7) au volume ainsi défini. La surface latérale ne donne rien dans l'intégrale, puisqu'en chaque point la composante normale de la force est nulle ; l'intégrale se réduit donc aux deux termes fournis par les surfaces terminales.

Supposons d'abord que le canal ne renferme aucune masse électrique. L'intégrale, réduite aux deux termes des bases, doit

être nulle, ce qui donne

$$\int F_n dS + \int F'_n dS' = 0,$$

ou, en valeurs absolues,

$$\int F_n dS = \int F'_n dS';$$

c'est-à-dire que *le flux de force est le même à l'entrée et à la sortie du canal.*

On voit, d'après cela, que le flux de force est le même à travers une section quelconque d'un canal orthogonal. Ce flux de force se conserve donc, comme le débit d'un liquide en mouvement dont la vitesse en chaque point serait égale et parallèle à la direction de la force.

Si la section du canal est infiniment étroite et les surfaces terminales normales à la force, l'équation se réduit á

$$F dS = F' dS';$$

d'où il résulte que *la force en chaque point du tube est en raison inverse de la section.*

35. Théorème de Coulomb. — Considérons sur un conducteur en équilibre un élément de surface dS, et menons à l'extérieur le canal correspondant jusqu'à la rencontre d'une surface de niveau S_1 infiniment voisine. Prolongeons le canal à l'intérieur du conducteur d'une manière quelconque, terminons-le par une surface arbitraire S_2, et appliquons le théorème au volume limité par les surfaces S_1 et S_2 et la surface latérale du canal. La force est nulle sur toute la surface S_2 qui fait partie du conducteur, et la composante normale est nulle sur la surface latérale du canal; il n'y aura donc de flux de force que pour la surface extérieure dS_1. Si l'on désigne par σ la densité superficielle de l'électricité sur l'élément dS, la masse totale comprise dans le volume considéré est σdS. Il en résulte

$$F dS_1 = 4\pi\sigma dS.$$

Les deux surfaces étant infiniment voisines et parallèles, on a $dS_1 = dS$, et il reste

$$F = 4\pi\sigma.$$

Ainsi, *la force électrique en un point infiniment voisin d'un conducteur en équilibre, quelles que soient d'ailleurs les masses agissantes, est égale à la densité électrique dans le voisinage de ce point multipliée par* 4π.

Comme on a d'ailleurs

$$F = -\frac{dV}{dn},$$

il en résulte que la densité superficielle à la surface d'un conducteur peut être exprimée en fonction de la force extérieure ou du potentiel par la relation

$$\sigma = \frac{F}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{dV}{dn}.$$

26. Éléments correspondants. — Considérons enfin un tube de force infiniment étroit placé entre les surfaces de deux conducteurs auxquelles il aboutit normalement.

Les deux éléments de surface dS et dS' découpés par le tube sont appelés ***éléments correspondants***.

Prolongeons le tube de part et d'autre jusque dans l'intérieur des conducteurs, où nous le supposerons terminé par deux surfaces quelconques. Le flux de force est nul sur toute la surface du volume ainsi déterminé, puisque la force est tangente le long des parois latérales et nulle aux deux extrémités qui font partie des conducteurs. Quant aux masses électriques, si on désigne par σ et σ' les densités sur les éléments correspondants dS et dS', leur somme est $\sigma dS + \sigma' dS'$. Cette somme doit être nulle, ce qui donne

$$\sigma dS = -\sigma' dS'.$$

Ainsi, *deux éléments correspondants contiennent des quantités d'électricité égales et de signes contraires.*

Si les deux surfaces en regard sont des plans parallèles, toutes les lignes de force sont des normales aux plans ; les éléments correspondants sont égaux et il reste

$$\sigma = -\sigma'.$$

Il en est de même si les deux conducteurs, sans être plans, sont infiniment voisins, parce qu'alors les éléments de surface dS et dS' peuvent être considérés comme égaux.

27. Champ uniforme. — Lorsque les lignes de force sont parallèles entre elles, les surfaces de niveau sont des plans parallèles. Le flux de force étant constant dans un tube cylindrique, on voit que la force a une valeur constante. On dit alors que le champ est *uniforme*.

Réciproquement, si la force dans un champ électrique est constante en grandeur et en direction, les surfaces de niveau sont nécessairement des plans parallèles.

28. Surface électrisée séparant deux diélectriques. — Supposons enfin qu'une surface électrisée S (fig. 8), n'appartenant pas à un corps conducteur, sépare deux diélectriques différents.

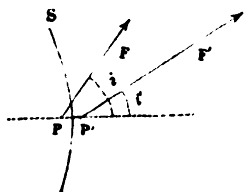


Fig. 8

Considérons un élément de surface dS sur lequel la densité est σ. Menons par le contour de cet élément un canal orthogonal terminé par deux bases égales et parallèles à dS, et de hauteur telle que la surface latérale soit infiniment petite par rapport à celle des bases. Le flux de force relatif aux parois de ce cylindre est négligeable par rapport au flux qui traverse les bases. En appelant F et F′ les forces dans les deux milieux au voisinage de cet élément, on aura donc

$$4\pi\sigma dS = F'_n dS - F_n dS,$$

ou

$$4\pi\sigma = F'_n - F_n.$$

Donc *la différence des composantes normales de la force de part et d'autre d'une surface électrisée est égale au produit de* 4π *par la densité sur la surface.*

Ce théorème comprend, comme cas particulier, celui de Coulomb (25) où S est la surface d'un corps conducteur.

29. — Considérons deux points P et P' situés au milieu des bases du cylindre précédent. L'action F au point P se compose de l'action de toutes les masses extérieures à l'élément et de l'action $-\varphi$ de cet élément. Quand on passe de P en P', l'action des masses extérieures ne change pas d'une manière sensible, mais celle de l'élément change de signe et devient $+\varphi$. Comme cette force φ est d'ailleurs normale par symétrie, la composante normale de la force varie de 2φ, ce qui donne

$$F'_n - F_n = 2\varphi = 4\pi\sigma,$$

ou

$$\varphi = 2\pi\sigma.$$

La composante normale de la force étant seule modifiée, les composantes tangentielles des forces F et F' restent égales de part et d'autre de la surface. Appelant i et i' les angles des forces avec la normale d'un même côté de la surface, on a donc

$$F' \sin i' = F \sin i.$$

L'équation précédente donne d'ailleurs

$$F' \cos i' - F \cos i = 4\pi\sigma;$$

on en déduit

$$\frac{\operatorname{tang} i'}{\operatorname{tang} i} = 1 + \frac{4\pi\sigma}{F\cos i} = 1 + \frac{4\pi\sigma}{F_n}.$$

Les forces éprouvent donc une sorte de *réfraction*, lorsqu'elles rencontrent une surface électrisée. On peut remarquer en passant que, la loi de réfraction étant déterminée par

le rapport des tangentes des angles de la normale avec les forces, il ne se présentera jamais de phénomène analogue à la réflexion totale.

41. Pression électrostatique. — L'électricité occupe à la surface du conducteur une couche très mince dont l'épaisseur ne paraît pas pouvoir être déterminée par expérience, mais qui est nécessairement finie. Il est probable que cette couche est limitée à la surface même du conducteur et qu'elle occupe une partie du milieu diélectrique ambiant.

Soit AB (fig. 9) l'épaisseur de cette couche. La force est nulle en A sur la surface interne S_1 et, à partir du point B sur la surface externe S_2, elle a pour valeur $F=4\pi\sigma$. Dans l'intervalle, la force varie donc de o à F suivant une loi inconnue.

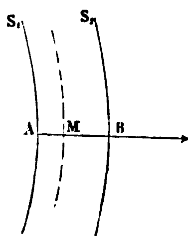


Fig. 9

Soit ρ la densité de la couche en un point M, et V le potentiel. La force en ce point est normale à une surface de niveau intermédiaire à S_1 et S_2 et a pour valeur $-\frac{dV}{dn}$. Désignons par e l'épaisseur AB. Ce qu'on a appelé jusqu'à présent densité superficielle représente la quantité d'électricité qui se trouve dans la couche e pour l'unité de surface; on a donc

$$\sigma=\int_0^e \rho\, dn.$$

Prenons trois axes rectangulaires dont l'un soit dirigé suivant la normale en M à la surface de niveau, c'est-à-dire la normale aux surfaces S_1 et S_2, et dont les deux autres x et y soient dans le plan tangent à cette surface de niveau.

Les dérivées secondes $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ étant nulles (**21**), la densité a pour expression

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d^2V}{dn^2}.$$

La force totale qui s'exerce sur la couche électrique σdS d'un élément de surface est donc, en désignant par p la force sur l'unité de surface,

$$pdS = \int_0^e \rho dS dn\left(-\frac{dV}{dn}\right) = \frac{dS}{4\pi}\int_0^e \frac{d^2V}{dn^2}\cdot\frac{dV}{dn}dn = \frac{dS}{8\pi}\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)^2\right]_A^B.$$

Comme $\frac{dV}{dn}$ est nul au point A, il reste simplement

$$p = \frac{1}{8\pi}F^2.$$

D'autre part,

$$F = 4\pi\sigma,$$

ce qui donne

$$p = \frac{1}{8\pi}16\pi^2\sigma^2 = 2\pi\sigma^2.$$

Il est remarquable que cette expression puisse être obtenue rigoureusement sans autre hypothèse que l'extrême petitesse de l'épaisseur e, et, par suite, quelle que soit la loi de distribution suivant la normale.

Ainsi, la masse électrique répandue sur chaque unité de surface est poussée vers l'extérieur avec une force égale à $2\pi\sigma^2$, proportionnelle par conséquent au carré de la densité. Cette *pression électrostatique,* ou *tension électrique,* est contrebalancée par la résistance du diélectrique.

Lorsque les conducteurs sont dans l'air, cette force a pour effet de diminuer la pression atmosphérique à leur surface. Si la pression était primitivement P par unité de surface sur les corps à l'état neutre, elle deviendra après l'électrisation, en chaque point de la surface des conducteurs,

$$P - p = P - 2\pi\sigma^2.$$

Ainsi une bulle de savon isolée augmentera de volume par l'électrisation et reprendra son volume primitif quand on le ramènera à l'état naturel. Van Marum, par exemple, a constaté qu'un ballon rempli d'hydrogène devient plus léger et que sa force ascensionnelle augmente quand on l'électrise.

Si la densité est uniforme sur un conducteur, il en est de même de la pression électrostatique, et, comme celle-ci est normale en chaque point, elle donne une résultante nulle.

Si la densité varie d'un point à un autre, l'effet des pressions électrostatiques équivaut, en général, à une force unique et à un couple. Le résultat ainsi obtenu est évidemment identique à celui que donnerait la considération directe des actions des masses extérieures sur les différentes masses élec-

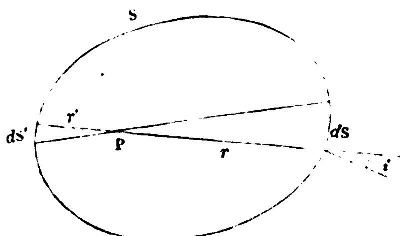


Fig. 10

triques du conducteur, que l'on supposerait fixées à la matière pondérable.

42. Conséquence de la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs. — La théorie qui précède a pour base la loi de Coulomb, considérée comme un fait expérimental. On pourrait suivre une marche différente en prenant comme point de départ cet autre fait expérimental, plus facile à vérifier d'une manière rigoureuse, que *l'électricité existe seulement à la surface des conducteurs et qu'à l'intérieur il n'y a ni électricité ni force électrique, même lorsque les conducteurs contiennent des cavités fermées.*

Considérons une surface S électrisée (fig. 10). Menons par un point intérieur P un cône d'ouverture infiniment petit $d\omega$, qui découpe sur la surface, aux distances r et r', deux éléments dS et dS' sur lesquels les densités sont respectivement σ et σ'.

Si les forces électriques sont proportionnelles à une fonction de la distance $f(r)$, l'action de l'élément dS sur l'unité de masse au point P peut s'écrire

$$\varphi = \sigma dS f(r).$$

En appelant i l'angle du rayon vecteur r avec la normale à l'élément dS, on a

$$r^2 d\omega = dS \cos i,$$

ce qui donne

$$\varphi = \frac{\sigma d\omega}{\cos i} r^2 f(r).$$

L'action de l'élément dS' est, de même,

$$\varphi' = \frac{\sigma' d\omega}{\cos i'} r'^2 f(r'),$$

et ces deux actions sont directement opposées.

Si la surface considérée est une sphère, les angles i et i' son égaux. Si de plus la sphère est isolée et soustraite à toute action étrangère, la distribution est homogène, et les densités σ et σ' sont égales.

La force au point P est nulle si les actions des éléments opposés dS et dS' sont égales et il suffit pour cela que l'on ait la relation

$$r^2 f(r) = r'^2 f(r') = \text{const.},$$

c'est-à-dire que les forces électriques soient en raison inverse du carré de la distance.

La loi du carré satisfait donc à la condition, comme on le savait déjà, et c'est la seule. On peut le voir d'une manière simple par le raisonnement suivant dû à M. Bertrand.

Quel que soit $f(r)$, on peut choisir deux valeurs r_1 et r_2 telles qu'entre ces deux valeurs de la variable le produit $r^2 f(r)$ soit toujours croissant ou décroissant quand r augmente.

Construisons une sphère (fig. 11) dont le diamètre soit égal à la somme $r_1 + r_2$, et considérons le point P qui partage le diamètre dans les deux segments r_1 et r_2. Sur ce point, les

actions des éléments opposés dS et dS', déterminés par un même cône d'ouverture $d\omega$, sont :
pour dS

$$\frac{\sigma d\omega}{\cos i} \cdot r^2 f(r),$$

et, pour dS',

$$\frac{\sigma d\omega}{\cos i} \cdot r'^2 f(r').$$

Toutes les valeurs de r et de r' sont comprises entre les limites r_1 et r_2 et la valeur de r est toujours plus petite que la valeur correspondante de r' ; la valeur de $r^2 f(r)$, pour les éléments de la partie supérieure, sera toujours plus petite ou

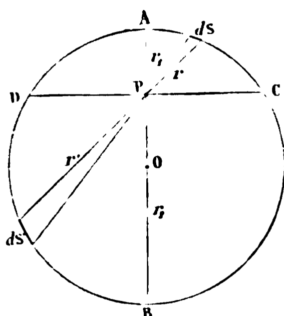


Fig. 11

toujours plus grande que celle de $r'^2 f(r')$ pour ceux de la partie inférieure ; par suite, l'action de la zone DAC plus petite ou plus grande que celle de la zone DBC. L'équilibre sera donc impossible, à moins que $r^2 f(r)$ ne soit une constante, c'est-à-dire à moins que la fonction $f(r)$ ne soit précisément en raison inverse du carré de la distance.

13. Actions des couches sphériques. — *L'action d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur est la même que si toute la masse était concentrée au centre de la sphère.*

Considérons, en effet, l'action qu'une sphère S (fig. 12), recouverte d'une couche homogène de densité σ, exerce sur un point P extérieur.

L'action étant évidemment dirigée vers le centre, il suf-

fira de faire la somme des composantes des actions élémentaires suivant cette direction.

Cette composante pour l'élément dS de surface au point A, situé à une distance ρ de P, est

$$\varphi = \frac{\sigma dS}{\rho^2}\cos\alpha.$$

Soit P' le point conjugué du point P, c'est-à-dire tel qu'on ait

$$OP'.OP = R^2;$$

si nous menons AP' et AO, les triangles AOP' et AOP sont

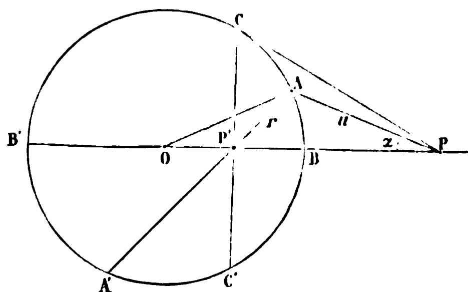


Fig. 13

semblables, à cause de l'angle commun en O et de la relation

$$\frac{OP'}{R} = \frac{R}{OP};$$

par suite, les angles OPA et OAP' sont égaux et l'on a, en appelant r la distance P'A et D la distance OP,

$$\frac{\rho}{r} = \frac{D}{R}.$$

Enfin, soit $d\omega$ l'angle qui sous-tend l'élément dS vu du point P',

$$r^2 d\omega = dS\cos\alpha.$$

En remplaçant $dS \cos\alpha$ par cette valeur dans l'expression de la composante φ, il vient

$$\varphi = \sigma d\omega \frac{r^2}{\rho^2} = \sigma d\omega \frac{R^2}{D^2},$$

et l'action totale de la sphère est

$$F = \sigma \frac{R^2}{D^2} \int d\omega = \frac{4\pi R^2 \sigma}{D^2} = \frac{M}{D^2}.$$

On voit que l'action est la même que si toute la masse M était concentrée au centre de la sphère.

Le potentiel de la couche sphérique à l'extérieur est aussi le même que si toute la masse était concentrée au centre.

Si le point P est très voisin de la surface, $D = R$ et l'action de la couche est égale à $4\pi\sigma$, conformément à ce que nous avons trouvé déjà (**35**) pour un conducteur quelconque.

La composante parallèle à OP de l'action exercée sur le point P par l'élément de surface dS ne dépend que de l'angle $d\omega$ sous lequel on voit cet élément du point P′. Cette composante est donc la même pour un élément dS' situé en A′ et opposé au premier par rapport au point P′.

Il en est de même pour tous les éléments de la zone CB′C′, comparés deux à deux aux éléments de la couche CBC′.

Le plan CC′ *partage donc la surface de la sphère en deux parties dont les actions sur le point* P *sont égales, chacune d'elles étant égale à* $2\pi\sigma \frac{R^2}{D^2}$.

Si le point P s'éloigne indéfiniment, les deux zones tendent à devenir égales; s'il est infiniment voisin de la surface, la zone antérieure devient infiniment petite et son action sur un point infiniment voisin se réduit à $2\pi\sigma$. Nous avons déjà obtenu ce résultat (**39**) pour une surface quelconque.

41. Action d'une sphère formée de couches homogènes. — Considérons d'abord une sphère électrisée dans toute son épaisseur et formée de couches concentriques homogènes.

L'action de cette sphère en un point extérieur est la même

que si toute la masse agissante était concentrée au centre, ou encore portée à la surface de manière à y former une couche uniforme.

Sur un point situé à l'intérieur de la sphère, l'action des couches qui l'enveloppent est nulle; celle des couches de rayon plus petit que sa distance au centre est encore la même que si leur masse était concentrée au centre.

Quand on va vers le centre, la masse agissante diminue donc de plus en plus; la force est toujours dirigée suivant le rayon, et dépend de la manière dont varie la densité.

Lorsque la densité ρ de la sphère est constante, l'action qui s'exerce sur un point intérieur à la distance r est égale à

$$F = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = \frac{4}{3} \pi \rho r;$$

elle est donc proportionnelle à la distance au centre.

Si la densité en un point est proportionnelle à la puissance n^e de sa distance l au centre, $\rho = al^n$; l'action à la distance r de la couche d'épaisseur dl est

$$\frac{4\pi l^2 a l^n dl}{r^2} = \frac{4\pi a}{r^2} l^{n+2} dl,$$

et l'action totale

$$F = \frac{4\pi a}{r^2} \int_0^r l^{n+2} dl = \frac{4\pi a r^{n+3}}{r^2(n+3)} = \frac{4\pi a}{n+3} r^{n+1}.$$

Cette action est constante pour $n = -1$; elle croît, au contraire, à mesure que l'on se rapproche du centre, si $n < -1$.

La masse totale de la sphère de rayon R est

$$M = \int 4\pi l^2 a l^n dl = \frac{4\pi a}{n+3} R^{n+3},$$

ce qui donne

$$F = M \frac{r^{n+1}}{R^{n+3}}.$$

Supposons que la densité varie suivant une loi quelconque.

Soit m la masse extérieure à la sphère qui passe par le point P, ρ_0 la densité moyenne de la sphère entière et ρ la densité moyenne des couches extérieures, on aura

$$F=\frac{M-m}{r^2}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0-\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)\rho\right]=\frac{M}{r^2}\left[1-\left(1-\frac{r^3}{R^3}\right)\frac{\rho}{\rho_0}\right].$$

La force à la surface est $F_1=\frac{M}{R^2}$, ce qui donne

$$\frac{F}{F_1}=\frac{R^2}{r^2}\left[1-\left(1-\frac{r^3}{R^3}\right)\frac{\rho}{\rho_0}\right].$$

La force peut d'abord être croissante à partir de la surface, puis atteindre un maximum, et devenir ensuite décroissante jusqu'au centre. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les variations de la pesanteur dans l'intérieur du globe. Il faut, pour cela, que l'on ait

$$\left(1-\frac{r^3}{R^3}\right)\frac{\rho}{\rho_0}<1-\frac{r^2}{R^2}.$$

Si l'épaisseur $h=R-r$ est très petite par rapport à R, cette condition peut s'écrire

$$3\left(\frac{r}{R}\right)^2\frac{h}{R}\frac{\rho}{\rho_0}<2\frac{r}{R}\cdot\frac{h}{R}, \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{\rho_0}<\frac{2}{3}<0,67.$$

La densité moyenne de la Terre étant environ égale à 5,5 et celle de la surface à 2,5, on a, en effet,

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{2,5}{5,5}=0,45.$$

CHAPITRE TROISIÈME

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

45. Émission et absorption de forces par les masses électriques. — Le flux de force qui se propage dans un tube orthogonal reste constant, comme nous l'avons vu (**34**), tant que ce tube ne rencontre aucune masse agissante ; le sens de la propagation est celui où le potentiel diminue.

Si le tube rencontre une masse m d'électricité, le flux de force prend, au lieu du passage, un accroissement $4\pi m$, qu'il conserve au delà tant que le tube ne rencontre pas de nouvelles masses. Si la masse rencontrée est sur la surface d'un conducteur, cette masse est telle qu'elle réduit à zéro le flux de force propagé par le tube; on peut donc dire, de deux éléments correspondants dS et dS' où les densités sont σ et σ', que l'électricité positive de l'élément dS *émet* un flux de force $4\pi\sigma dS$ qui va *s'absorber* à l'autre bout du tube dans la quantité égale d'électricité négative située sur l'élément dS'.

D'après les idées de Faraday, il n'existerait pas de tubes de force indéfinis; un tube émanant d'un corps électrisé irait toujours aboutir quelque part sur un autre corps, de manière à induire sur l'élément correspondant une quantité d'électricité égale et de signe contraire. Il ne pourrait, d'après cela, exister nulle part une quantité absolue et indépendante d'électricité, soit positive soit négative, et qui n'aurait pas à l'autre extrémité du tube sa quantité complémentaire.

Aucune ligne de force ne peut exister entre deux points

chargés de même électricité. Il n'en peut exister également entre deux points au même potentiel. Enfin, aucune ligne de force ne peut correspondre, sur un conducteur, à un point non chargé d'électricité (**25**).

46. En dehors des masses agissantes, le potentiel ne peut avoir ni maximum ni minimum. — Une masse isolée m concentrée en un point peut être regardée comme une couche répandue sur un conducteur très petit. Si la masse m est positive, le point A qu'elle occupe est un centre d'émission de force pour toutes les directions; si elle est négative, c'est pour toutes les directions un centre d'absorption. Dans les deux cas, les surfaces de niveau voisines sont des surfaces fermées. Ces surfaces à la limite sont même sphériques, car à une distance très petite r du point A, le potentiel des masses extérieures devient négligeable devant le potentiel $\frac{m}{r}$ de la masse m.

Les surfaces de niveau étant fermées autour de A, le potentiel y a une valeur maximum ou minimum : maximum, si la masse m est positive; minimum, si elle est négative.

Réciproquement, partout où le potentiel présente un maximum ou un minimum, il y a de l'électricité.

En effet, à partir d'un point A de maximum, le potentiel est décroissant dans toutes les directions, les surfaces de niveau voisines sont nécessairement fermées, et le flux de force qui traverse, par exemple, une surface sphérique S très petite comprenant le point A a une valeur finie Q. Il y a donc dans l'intérieur de cette surface une quantité d'électricité positive égale à $\frac{Q}{4\pi}$.

De même, un minimum de potentiel est un centre d'absorption de force où il y a une masse correspondante d'électricité négative.

Donc, *dans un système électrique quelconque, il ne peut y avoir ni maximum absolu ni minimum absolu de potentiel en dehors des masses agissantes.*

47. Points et lignes d'équilibre. — Soit V_0 le potentiel en un point fixe P_0. Le potentiel V en un point voisin P, dont les coordonnées par rapport à des axes passant par le premier

sont x, y, z, peut être exprimé par la formule de Maclaurin, en fonction des puissances croissantes des coordonnées, et on a

$$V = V_0 + H_1 + H_2 + H_3 + \cdots\cdots,$$

H_1 étant une fonction du premier degré des coordonnées du point P, H_2 une fonction de second degré, etc. Si la fonction H_1 est identiquement nulle, c'est-à-dire si les trois dérivées partielles du potentiel sont nulles,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = 0,$$

le point P_0 est un point singulier de la surface de niveau V_0; la force y est nulle, c'est donc un *point d'équilibre*. Pour les points voisins, on peut négliger en présence de H_2 les fonctions d'un degré supérieur et l'équation de la surface de niveau se réduit à

$$V = V_0 + H_2.$$

La surface de niveau au point P_0 est tangente à un cône du second degré dont l'équation est $H_2 = 0$.

Si la fonction H_2 elle-même est nulle et que H_n soit la première fonction du développement qui ne s'évanouisse pas, l'équation

$$H_n = 0$$

est celle d'un cône du degré n tangent à la surface du niveau au point P_0. Ce cône sera formé de n nappes ou d'un nombre moindre, correspondant à un nombre égal de nappes de la surface de niveau.

Si les nappes du cône ne se coupent pas, il en est de même des surfaces de niveau et P_0 est un point d'équilibre isolé.

Si les nappes du cône se coupent, chaque ligne d'intersection est aussi l'intersection de nappes correspondantes de la surface de niveau et constitue une *ligne d'équilibre* qui aboutit au point P_0.

48. — *Si la surface de niveau au point* P_0 *est formée de deux nappes qui se coupent, l'intersection des nappes se fait à angle droit.*

Il est évident d'abord qu'en tout point de la ligne d'intersection la force est nulle, puisqu'elle ne peut être à la fois normale aux deux nappes. Si l'intersection a lieu à la surface d'un conducteur, il n'y a pas d'électricité aux points correspondants (**44**); c'est une *ligne neutre*.

D'un autre côté, prenons la tangente commune pour axe des z et l'axe des y tangent à l'une des nappes. Ces deux directions étant sur une surface de niveau, on a (**31**)

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 = 0.$$

La somme des trois dérivées secondes partielles devant être nulle, d'après le théorème de Laplace, il en résulte

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 = 0,$$

c'est-à-dire que l'axe des x est aussi tangent à la surface de niveau ; les deux nappes se coupent donc à angle droit.

49. — Ce raisonnement suppose que la fonction H_2 est finie. Si cette fonction s'évanouit aussi, l'équation de Laplace se réduit toujours à

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 = 0,$$

quand on prend pour axe des z la ligne d'intersection. Désignons par r la distance du point P à l'axe des z et posons

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta.$$

L'équation de Laplace devient

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0.$$

L'intégrale de cette équation, développée suivant les puissances croissantes de r, est

$$V = V_0 + A_1 r \cos(\theta + \alpha_1) + A_2 r^2 \cos(2\theta + \alpha_2) \cdots\cdots + A_n r^n \cos(n\theta + \alpha_n).$$

Sur la ligne d'équilibre on a $A_1 = 0$. Si n est l'ordre du premier terme qui ne s'évanouit pas, il vient

$$V = V_0 + A_n r^n \cos(n\theta + \alpha_n) + \cdots\cdots;$$

l'équation de la surface tangente à la surface de niveau au point P_0 se réduit à

$$\cos(n\theta + \alpha_n) = 0,$$

et représente n plans, passant par la ligne d'intersection, dont les angles successifs sont égaux à $\frac{\pi}{n}$.

Dans ce cas, *la surface de niveau est formée de n feuillets se coupant successivement sous l'angle* $\frac{\pi}{n}$.

Considérons, comme exemple, la surface d'un conducteur A chargée en partie d'électricité positive et d'électricité négative; la ligne de séparation des deux couches est une *ligne neutre*. La force est nulle en un point quelconque de la *ligne neutre* et il y a dans le diélectrique une autre surface de niveau qui coupe normalement le conducteur le long de cette ligne. On remarquera que cette surface de niveau particulière sépare les lignes de force émanant du conducteur A de celles qui viennent y aboutir. On peut donc la considérer, au moins dans une partie de son étendue, comme une surface limite des lignes de force. Nous retrouverons cette propriété dans différents cas particuliers.

50. L'état d'équilibre est unique. — On peut remarquer, d'abord, que *la superposition de deux états d'équilibre est un état d'équilibre*.

En effet, dans chacun des deux états d'équilibre le potentiel est constant sur tous les conducteurs. La superposition

des deux systèmes de couches électriques produit en chaque point un potentiel égal à la somme des potentiels relatifs aux deux états primitifs. Le potentiel est donc encore constant sur chacun des conducteurs et l'équilibre existe.

Il en résulte que, si l'on change dans un rapport constant la densité électrique en chaque point, on obtiendra un nouvel état d'équilibre, puisque l'opération revient à superposer deux ou plusieurs états d'équilibre identiques.

51. — *Un système de conducteurs* $A_1, A_2, A_3 \ldots$, *dont les charges électriques sont toutes nulles séparément, est nécessairement à l'état neutre.*

Désignons, en effet, par V_1, V_2, $V_3 \ldots$, les potentiels de ces différents conducteurs, et soit V_1, le plus grand.

Il ne peut y avoir dans le diélectrique aucun point où le potentiel soit plus élevé que V_1, puisqu'il n'y a pas de maximum de potentiel en dehors des masses agissantes. Le potentiel baisse donc dans tous les sens à partir du conducteur A_1, toutes les lignes de force émanent de ce conducteur et aucune n'y aboutit. Comme la somme des flux de force doit être nulle, puisque, par hypothèse, la charge totale de A_1 est nulle, on voit que tous les flux de force élémentaires sont nuls. La densité est donc nulle sur toute la surface et, par suite, le conducteur n'est pas électrisé.

Le conducteur A_1 étant à l'état neutre n'exerce aucune action sur les conducteurs voisins, on peut le supprimer et raisonner de la même manière sur le conducteur suivant A_2; on démontrera ainsi successivement que tous les conducteurs sont à l'état neutre.

Supposons maintenant que les conducteurs A_1, A_2, $A_3 \ldots$, ayant des charges M_1, M_2, $M_3 \ldots$, différentes de zéro, il y ait deux états d'équilibre possibles, tels que les densités sur les conducteurs A_1, A_2, $A_3 \ldots$, soient σ_1, σ_2, $\sigma_3 \ldots$, dans le premier état et σ'_1, σ'_2, $\sigma'_3 \ldots$, dans le second.

En changeant les signes de toutes les masses électriques du deuxième état, on aura encore un état d'équilibre, lequel, superposé au premier, donnera un nouvel état d'équilibre où la charge totale sera nulle sur chacun des conducteurs.

Dans ce cas, la densité doit être nulle partout, d'après la remarque précédente. On a donc

$$\sigma_1 = \sigma'_1,$$
$$\sigma_2 = \sigma'_2,$$
$$\sigma_3 = \sigma'_3,$$
$$\ldots\ldots$$

La distribution est donc la même dans les deux états, et par suite l'équilibre est unique. Si le système proposé comprenait des masses fixes, on pourrait toujours les supposer sur des conducteurs infiniment petits et rien ne serait changé aux raisonnements. Le théorème est donc général.

52. Théorèmes relatifs aux surfaces fermées. — *Si le potentiel est constant sur une surface fermée* S *ne renfermant pas de masse agissante, il est constant dans tout l'intérieur.*

En effet, le potentiel ne pourrait varier à l'intérieur de la surface S sans atteindre en un point une valeur maximum ou minimum, ce qui est impossible puisqu'il n'y a pas d'électricité (**45**).

Si la surface considérée est la surface extérieure d'un conducteur, on voit que le potentiel est constant, non seulement dans la masse du conducteur, ce qui est une conséquence déjà déduite des conditions de l'équilibre, mais dans les cavités que celui-ci peut renfermer.

53. — *Si une surface à potentiel constant comprend une portion du diélectrique, le potentiel est constant, non seulement dans l'espace intérieur, mais dans tout l'espace extérieur, en dehors des masses agissantes.*

En effet, le potentiel étant constant à l'intérieur, aucune ligne de force ne traverse la surface ; toutes celles qui pourraient la rencontrer devraient y naître ou s'y absorber, ce qui est impossible puisque la surface ne porte pas d'électricité. Aucune ligne de force ne rencontre donc la surface.

Puisqu'il n'y a aucune ligne de force rencontrant la surface, le potentiel est constant à l'extérieur dans son voisinage immédiat ; on peut donc tracer tout autour une nouvelle surface S′ jouissant de la même propriété, sur laquelle on

répétera le même raisonnement, et ainsi de suite indéfiniment, à la condition de se tenir toujours en dehors des masses agissantes.

51. — Ce dernier théorème a été démontré par Gauss, d'une manière différente, au moyen du lemne suivant :

Si une surface sphérique ne renferme aucune masse agissante, le potentiel au centre est la moyenne des valeurs du potentiel aux différents points de la surface.

En effet, soit R le rayon de la sphère, m une des masses agissantes située en un point A à une distance d du centre, et r la distance au point A d'un élément dS de la surface; la valeur moyenne, sur la surface, du potentiel dû à la masse m a pour expression

$$V_m = \frac{\int \frac{m dS}{r}}{4\pi R^2};$$

la somme $\int \frac{m dS}{r}$ est la valeur en A du potentiel d'une couche homogène de densité m qui recouvrirait la sphère, elle est égale (**12**) à

$$\frac{4\pi R^2 m}{d}.$$

La valeur moyenne du potentiel sur la sphère est donc

$$V_m = \frac{m}{d},$$

c'est-à-dire, égale à la valeur du potentiel au centre.

Ce raisonnement s'étend évidemment à un nombre de masses quelconque.

Cela posé, supposons que dans une portion du diélectrique limitée par la surface S, le potentiel ait une valeur constante V ; si la valeur du potentiel était différente de V à l'extérieur, il serait toujours possible de tracer une sphère ayant son centre à l'intérieur de S et ne rencontrant à l'extérieur que des points où le potentiel aurait une valeur toujours plus

grande ou toujours plus petite que V ; mais alors la valeur moyenne du potentiel sur la sphère serait différente de sa valeur au centre. Le potentiel à l'extérieur de la surface S ne peut donc être différent de V.

55. — *Lorsqu'une surface fermée* S *enveloppe toutes les masses agissantes et que, sur cette surface, le potentiel a une valeur constante* V, *il a en chacun des points extérieurs une valeur comprise entre* V *et zéro.*

Supposons V positif. Comme le potentiel est nul à l'infini, il ne peut avoir en un point P extérieur à la surface une valeur supérieure à V, sans quoi il y aurait quelque part un maximum de potentiel et, par suite, des masses électriques, ce qui est contraire à l'hypothèse. De même, le potentiel en P ne peut pas être plus petit que zéro, sans quoi il y aurait un minimum. Le potentiel à l'extérieur est donc compris entre V et zéro. Il ne peut même être égal à V, à moins que V lui-même ne soit nul. En effet, il ne peut être égal à V sans être un maximum par rapport aux points voisins ou sans faire partie d'une région à potentiel constant qui s'étendrait jusqu'à la surface S ; mais, dans ce dernier cas, d'après le théorème précédent, le potentiel serait constant dans tout le diélectrique et ne pourrait avoir que la valeur zéro, puisqu'il est nul à l'infini.

56. — *Une surface conductrice* S *qui renferme toutes les masses agissantes ne peut avoir d'électricité que d'une seule espèce.*

En effet, soit V le potentiel de la surface que nous supposerons positif. S'il y avait de l'électricité négative en un point A, des lignes de force aboutiraient à ce point, et il faudrait qu'il y eût quelque part un point extérieur P où le potentiel eût une valeur supérieure à V, ce qui est impossible d'après le théorème précédent.

57. — *Lorsque, dans un système en équilibre, un corps conducteur enveloppe diverses masses électriques, la somme algébrique des quantités d'électricité situées à l'intérieur et sur la surface interne du corps est nulle.*

Soient m, m', m'',... les masses comprises à l'intérieur du conducteur A (fig. 13) et M la masse de la couche répandue sur

la surface interne S ; ajoutons qu'il peut y avoir de l'électricité sur la surface extérieure S' et d'autres masses en dehors. Sur une surface fermée S_1 prise dans le conducteur et comprenant toutes les masses internes, la force est nulle en chaque point.

Le flux de force relatif à cette surface est donc nul et, par

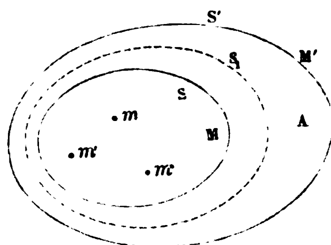


Fig. 13

conséquent, la somme algébrique des masses qu'elle renferme est nulle. On a donc

$$M + m + m' + m'' + \ldots\ldots = 0,$$

ou

$$M + \sum m = 0.$$

La couche M développée par influence sur la surface S est égale et de signe contraire à la somme algébrique des masses comprises dans la cavité. Cette couche *absorbe* le flux de force qui émane des masses intérieures. Le système de cette couche et des masses qu'elle comprend donne un potentiel nul et une action nulle en tout point extérieur.

Si le conducteur A est en communication avec le sol, son potentiel est nul ; si donc il n'y a pas d'autres masses agissantes que celles qui sont comprises dans la cavité, la surface extérieure S' est à l'état neutre et le potentiel est nul partout en dehors de la cavité.

Une masse électrique M' mise sur la surface S' isolée y prend une distribution indépendante des masses intérieures. Elle produira un potentiel constant V' dans toute l'étendue du

conducteur A et des cavités qu'il renferme, et ce potentiel s'ajoutera en chaque point au potentiel déjà existant. La masse M′ n'aura donc aucune influence sur l'équilibre des masses intérieures.

58. — S'il n'y a pas d'autres masses agissantes que celles qui sont comprises dans la cavité, et si le conducteur A était primitivement à l'état neutre, sa charge totale doit rester nulle ; en même temps qu'une couche M sur la surface intérieure S, il se développera une couche égale et contraire M′ sur la surface extérieure S′ et on aura,

$$M' = -M = m + m' + m'' \ldots\ldots = \sum m.$$

Cette couche M′, égale à la somme algébrique des masses intérieures et de même signe, est en équilibre d'elle-même quelle que soit la position des masses intérieures.

On trouve ainsi la loi de Faraday : *La quantité d'électricité induite par un système électrique sur un corps conducteur qui l'enveloppe est égale à la quantité inductrice.*

59. — *L'action que des masses électriques données exercent à l'extérieur d'une surface fermée quelconque est la même que celle d'une couche de même masse répandue sur cette surface suivant une certaine loi.*

Soient $m', m', m'' \ldots\ldots$ ou $\sum m$ les masses données, que nous supposerons fixes comme si elles appartenaient à des corps non conducteurs ; une surface S de forme quelconque les renferme. Supposons que, pour un instant, nous remplacions cette surface par un feuillet matériel formant un conducteur infiniment mince relié au sol ; la surface interne de ce feuillet se recouvrira d'une masse $-M = -\sum m$ dont le potentiel pour tous les points extérieurs est égal et de signe contraire à celui de $\sum m$. Une couche $+M$ distribuée de la même manière sur la surface S aura donc partout à l'extérieur un potentiel égal et de même signe que celui des masses considérées $\sum m$.

En général, la couche M ne sera pas en équilibre d'elle-

même, c'est-à-dire qu'elle n'aura pas la distribution qui résulterait de la forme de la surface et de l'action des masses extérieures; les lignes de force ne la coupent pas normalement.

60. — *La couche* $+\mathrm{M}$ *sera en équilibre d'elle-même, si la surface* S *est une surface de niveau du système primitif, en tenant compte des masses extérieures.*

Désignons par $\sum m'$ les masses extérieures. Les lignes de force du champ sont les mêmes à l'extérieur de S pour le système $\sum m$ et $\sum m'$ et pour le système M et $\sum m'$; ces lignes étant normales à S par hypothèse, la couche M qui la recouvre y est en équilibre et a un potentiel constant V.

On pourra donc, pour les points extérieurs, remplacer le système $\sum m$ par une masse égale en équilibre sur une surface de niveau qui l'entoure, la densité étant déterminée en chaque point par la condition

$$\sigma = \frac{\mathrm{F}}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\frac{d\mathrm{V}}{dn}.$$

Cette substitution modifie toujours le champ à l'intérieur de la surface S; dans le cas actuel, le potentiel intérieur est devenu constant et égal à V, puisqu'il est constant sur la surface et que la cavité ne renferme plus d'électricité.

Si le potentiel est constant, la force est nulle, le système extérieur $\sum m'$ et la couche M exercent donc en chaque point de l'intérieur de S des actions égales et contraires; une couche $-\mathrm{M}$ exercerait des actions égales et de même signe que celles de $\sum m'$. On peut donc, pour tous les points intérieurs à la surface de niveau S, substituer à l'action des masses extérieures celle d'une couche en équilibre égale aux masses intérieures et de signe contraire.

61. — Il en résulte les théorèmes suivants :

Si l'on considère une surface de niveau S dans un système électrique quelconque, on peut :

1° *Pour tous les points extérieurs, remplacer les masses in-*

térieures $\sum m$ *par une masse* M, *égale et de même signe, en équilibre sur cette surface ;*

2° *Pour les points intérieurs, remplacer les masses extérieures* $\sum m'$ *par la même masse* M *changée de signe, c'est-à-dire par une masse égale et contraire aux masses intérieures, cette couche étant encore en équilibre.*

62. Théorème de Gauss. — Étant donnés deux systèmes électriques, l'un formé de masses $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots$ et donnant un potentiel V, l'autre de masses $m'_1, m'_2, m'_3, \ldots\ldots$ et donnant un potentiel V', on aura identiquement

$$\sum m V' = \sum m' V,$$

c'est-à-dire que *la somme des masses élémentaires du premier système, multipliées respectivement par la valeur du potentiel du second système au point qu'elles occupent, est égale à la somme analogue relative aux masses du second système;* les sommes doivent être remplacées par des intégrales si les masses occupent une étendue finie.

Cette proposition est une identité et il suffit, pour s'en assurer, de remplacer les potentiels par leurs valeurs en fonction des masses et des distances. On voit alors que chacun des membres de l'équation est égal à la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse d'un système par une masse de l'autre et divisant le produit par la distance qui les sépare.

Il suffirait aussi de remarquer que les sommes $\sum m' V$ et $\sum m V'$ désignent le travail qu'il faudrait dépenser pour amener respectivement en présence l'un de l'autre, depuis l'infini jusqu'à la position qu'ils occupent, les deux systèmes $\sum m$ et $\sum m'$ supposés rigides et, dans l'un et l'autre cas, ce travail est évidemment le même.

Lorsque les deux systèmes considérés sont des conducteurs $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots$ en équilibre, le potentiel est constant sur chaque conducteur, et si on désigne leurs masses totales

par M_1, M_2, M_3, ... et M'_1, M'_2, M'_3 ....., l'équation devient

$$M_1V'_1 + M_2V'_2 + M_3V'_3 \dots\dots = M'_1V_1 + M'_2V_2 + M'_3V_3 \dots\dots$$

63. Corollaires. — Les théorèmes suivants, comme l'a montré M. Bertrand, peuvent être considérés comme des corollaires du théorème de Gauss.

I. — *Si un conducteur* A *à l'état neutre, isolé ou non, est soumis à l'action d'une masse électrique m placée successivement en deux points* P *et* P′ *du diélectrique, le potentiel dû à la charge induite en* A *sera le même au point* P′ *dans le premier cas qu'au point* P *dans le second.*

Remarquons d'abord qu'on peut toujours considérer un point quelconque du diélectrique comme le centre d'une sphère conductrice infiniment petite, puisque la charge que prend cette sphère est toujours nulle, et donne toujours en son centre un potentiel égal à zéro.

Si le corps A est en communication avec le sol, on aura à considérer les deux états d'équilibre suivants :

		Potentiels.	Charges.
1°	Sphère P	U	m
	Sphère P′	V	o
	Corps A	o	x
2°	Sphère P	V′	o
	Sphère P′	U′	m
	Corps A	o	x'

Si l'on applique le théorème de Gauss à ces deux états, on obtient

$$mV' = mV,$$

ou

$$V = V'.$$

Si le corps A est isolé, son potentiel n'est pas égal à zéro,

mais sa charge totale est nulle dans les deux états et le résultat final est le même.

II. — *Si, de deux conducteurs* A *et* B, *chacun est mis successivement en communication avec une source qui le porte au potentiel* V, *l'autre étant en communication avec le sol et par suite au potentiel zéro, la quantité d'électricité développée par influence sur le dernier est la même dans les deux cas.*

On a, en effet, dans le premier état

	Potentiel.	Charge.
A	V	x
B	o	$-M$

et, dans le second,

	Potentiel.	Charge.
A	o	$-M'$
B	V	x

Appliquant le théorème précédent, on obtient

$$M'V = MV,$$

ou

$$M' = M.$$

64. Théorème d'Earnshaw. — *Un corps électrisé ne peut pas être en équilibre stable dans un champ électrique.*

Soit un corps électrisé A placé dans un champ produit par des masses extérieures B, et supposons fixées toutes les masses, y compris celle de A.

Désignons par m la masse électrique d'un élément de volume de A en un point P où le potentiel des masses extérieures est V. L'énergie du corps dans le champ est

$$W = \sum mV. \tag{1}$$

Pour qu'il y ait équilibre stable, il faut que dans une direction quelconque r la dérivée $\frac{\partial W}{\partial r}$ soit nulle ou positive.

Soient x, y, z, les coordonnées du point P; ξ, η, ζ celles d'un point P_0 pris à l'intérieur du corps A, et a, b, c celles du point P par rapport à trois axes nouveaux parallèles aux premiers et passant par le point P_0; on aura

$$x = a + \xi,$$
$$y = b + \eta,$$
$$z = c + \zeta.$$

Le potentiel V peut être considéré comme une fonction de a, b, c et de ξ, η, ζ. Si le corps A est astreint à se déplacer parallèlement à lui-même, on aura

$$dx = d\xi,$$
$$dy = d\eta,$$
$$dz = d\zeta,$$

et, par suite

$$(2) \qquad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2}.$$

Cette somme étant nulle pour chacun des termes mV du second membre de l'équation (1), puisque V représente le potentiel des masses extérieures, on aura aussi

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \zeta^2} = 0.$$

L'énergie W est donc une fonction des coordonnées du point P_0, et cette fonction satisfait à l'équation de Laplace, tant que l'équation (2) est elle-même satisfaite. On peut supposer que le point P_0 reste compris à l'intérieur d'une sphère de rayon r assez petit pour que le corps considéré A ne rencontre aucune des masses extérieures. Pour tout déplacement parallèle à l'un des rayons de cette sphère, la variation d'énergie sera

$$dW = \frac{\partial W}{\partial r} dr.$$

Appliquons l'équation de Green (**22**) à la surface de cette sphère, nous aurons

$$\int \frac{\partial W}{\partial r} dS = \int \Delta W dv = 0.$$

L'intégrale $\int \frac{\partial W}{\partial r} dS$ devant être nulle, il en résulte que la dérivée $\frac{\partial W}{\partial r}$ est négative pour certaines directions et positive pour d'autres; par conséquent le corps A n'est pas en équilibre, et il tend à se déplacer vers les régions pour lesquelles l'énergie W diminue.

Il y a équilibre si $\frac{\partial W}{\partial r}$ est toujours nul, c'est-à-dire si l'énergie est constante ou passe par un maximum ou un minimum absolu. On a alors

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial W}{\partial x} = \sum m \frac{\partial V}{\partial x} = -\sum mX = 0,$$

et, de même,

$$\sum mY = 0,$$
$$\sum mZ = 0.$$

Les composantes X, Y, Z de la force du champ produit par les masses extérieures peuvent être développées en fonction des puissances croissantes des coordonnées a, b, c, et des composantes X_0, Y_0, Z_0 relatives au point P_0, ce qui donne

$$X = X_0 + H_1 + H_2 + \cdots\cdots + H_n + \cdots\cdots,$$

H_1, H_2,.... H_n.. étant des fonctions des degrés 1, 2.... n.. des coordonnées a, b et c.

Il vient alors

$$\sum mX = \sum m(X_0 + H_1 + H_2 + \cdots\cdots + H_n) = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il est nécessaire que tous les coefficients du développement soient nuls; cela exige d'abord que toutes les dérivées de X soient nulles, puisque la position du point P_0 est arbitraire, et ensuite qu'on ait

$$X_0 \sum m = 0.$$

Il faut donc, ou que la masse totale $\sum m$ du corps A soit nulle, ou que les composantes X_0, Y_0 et Z_0 de la force soient nulles elles-mêmes.

Ainsi, pour qu'un corps électrisé soit en équilibre dans un champ électrique, il faut, ou que la force du champ soit nulle, ou que le champ soit uniforme, avec la condition que la somme algébrique des masses électriques que possède le corps soit nulle.

Nous avons supposé pour cette démonstration que l'électricité était fixée sur le corps A et que les masses extérieures formaient elles-mêmes un système rigide. Le théorème s'applique, à plus forte raison, au cas où le système renfermerait des corps conducteurs. Si l'équilibre stable n'existe pas quand on introduit des liaisons dans le système, il existe encore moins lorsqu'on supprime ces liaisons, par exemple, lorsque les corps électrisés sont en partie conducteurs, ce qui laisse plus de jeu au déplacement des masses électriques.

CHAPITRE QUATRIÈME

ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE

65. Conditions d'équilibre des conducteurs. — Le problème général de l'équilibre électrique, quand il ne s'agit que de conducteurs, peut s'énoncer ainsi :

Les conducteurs étant donnés de forme et de position, les uns isolés, les autres en communication avec le sol, les premiers chargés d'une quantité donnée d'électricité, déterminer le potentiel en chaque point.

En d'autres termes, le problème revient à déterminer une fonction V des coordonnées qui satisfasse aux conditions suivantes :

1° La fonction doit devenir nulle à l'infini et prendre une valeur constante sur chacun des conducteurs, cette valeur étant zéro sur tous les conducteurs en communication avec le sol.

2° La somme des trois dérivées secondes partielles de la fonction doit être nulle dans toute l'étendue des diélectriques et à l'intérieur des conducteurs, puisque la densité électrique est nulle en tous ces points.

3° En chaque point de la surface des conducteurs la densité superficielle est déterminée par l'équation

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn},$$

de sorte que la charge totale M de l'un des conducteurs a

pour expression

$$M = \int \sigma dS = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dn}\, dS.$$

Ces trois conditions sont suffisantes, puisqu'elles déterminent un état d'équilibre satisfaisant aux données de la question, et qu'il n'y a pour le système qu'un seul état d'équilibre.

Ce problème présente le plus souvent de grandes difficultés au point de vue mathématique, et on n'en connaît pas de solution générale. Il n'a été résolu d'une manière complète que dans quelques cas particuliers, dont nous étudierons plus loin les principaux; mais on peut déduire de l'énoncé général un certain nombre de propriétés remarquables.

66. Remarques générales. — Supposons d'abord que, parmi tous les conducteurs en présence A_1, A_2... A_n, un seul A_1, étant isolé, ait reçu une charge M, et que tous les autres soient en communication avec le sol.

Lorsque l'équilibre est établi, le potentiel a une valeur constante V_1 sur A_1, et il est nul sur tous les autres conducteurs. Supposons $V_1 > 0$.

Dans toute l'étendue du diélectrique le potentiel ne peut être ni supérieur à V_1 ni inférieur à zéro, et il est compris entre V_1 et o (**55**). Il en résulte que les conducteurs en communication avec le sol ne possèdent que de l'électricité négative; car si leur surface présentait des régions positives, il en partirait des lignes de force qui se dirigeraient vers des points où le potentiel serait plus faible, c'est-à-dire négatif, et ces points n'existent pas.

Toutes les lignes de force du champ émanent donc exclusivement du conducteur A_1; les unes vont aboutir aux conducteurs en communication avec le sol, les autres s'éloignent indéfiniment.

Il en résulte que la charge négative de ces conducteurs est une fraction seulement de celle qui existe sur A_1; les deux charges ne seraient égales que si l'un des conducteurs en communication avec le sol entourait complètement A_1.

67. — Supposons maintenant qu'il y ait en présence du conducteur A_1 d'autres conducteurs isolés A_2, A_3, ...,

d'abord à l'état neutre et dont la charge totale est, par suite, restée nulle.

Le potentiel est encore positif et plus petit que V_1 dans toute l'étendue du diélectrique. Il a une valeur constante sur chacun des autres conducteurs ; cette valeur est positive, puisque tous les conducteurs ont une partie de leur surface chargée d'électricité positive, qu'il en émane, par conséquent, des lignes de force, et que ces lignes de force se propagent vers des régions où le potentiel est partout positif.

Soit A_2 celui des conducteurs isolés dont le potentiel V_2 est le plus élevé ; une portion de sa surface est négative, il reçoit donc des lignes de force. Aucune de ces lignes de force ne lui vient du sol, ni, par hypothèse, des autres conducteurs, dont le potentiel est plus faible ; toutes proviennent donc du conducteur A_1, et par suite V_2 est plus petit que V_1. Comme, d'ailleurs, les lignes de force reçues par A_2 ne forment pas la totalité de celles qui sont émises par A_1, chacune des couches positive et négative qui forment la charge nulle de A_2 est plus petite que la charge totale de A_1.

On raisonnerait de même pour tous les autres conducteurs ; ainsi, le suivant par ordre de grandeur du potentiel, A_3 par exemple, reçoit des lignes de force de A_1 et de A_2, et ces dernières peuvent être considérées comme provenant indirectement de A_1. Sur chacun des conducteurs isolés, la charge négative est donc moindre que la charge positive de A_1, à moins que l'un d'eux ne forme une surface fermée enveloppant complètement le conducteur A_1.

68. Relations entre les charges et les potentiels. — Désignons toujours par A_1, A_2... A_n les conducteurs, et soient M_1, M_2.... M_n leurs charges respectives et V_1, V_2... V_n les potentiels correspondants.

Supposons d'abord tous les conducteurs isolés, à l'état neutre et au potentiel zéro. Si nous donnons à l'un d'eux, A_1, une charge positive égale à l'unité, son potentiel devient α_{11} et ceux des autres conducteurs sont respectivement α_{21}, α_{31}... α_{n1}. Si, au lieu d'une charge égale à l'unité, on donnait à A_1 la charge M_1, tous les potentiels seraient multipliés par M_1 ; ils seraient $\alpha_{11}M_1$, $\alpha_{21}M_1$... $\alpha_{n1}M_1$. Supposons qu'on décharge A_1

et qu'on donne à A_2 la charge M_2, les potentiels deviendront $\alpha_{12}M_2$, $\alpha_{22}M_2 \cdots\cdots \alpha_{n2}M_2$; et ainsi de suite. Or l'état final, quand tous les conducteurs reçoivent simultanément leurs charges respectives, est la superposition de tous les états obtenus ainsi successivement; on aura donc, pour exprimer le potentiel de chacun des conducteurs, une équation de la forme

$$(1) \qquad V_p = \alpha_{p1}M_1 + \alpha_{p2}M_2 \cdots\cdots \alpha_{pn}M_n,$$

et, par suite, n équations semblables pour le système total.

On en conclut le théorème suivant :

Dans un système électrique quelconque en équilibre, les potentiels des divers conducteurs peuvent s'exprimer linéairement en fonction des charges.

Parmi les n^2 coefficients des équations (1), le coefficient α_{pp} exprime le potentiel du conducteur A_p quand il est chargé de l'unité d'électricité, tous les autres étant à l'état neutre; un coefficient tel que α_{qp} désigne le potentiel que prend, en même temps, un des conducteurs tels que A_q.

Il est facile de voir que ces derniers coefficients satisfont à la relation

$$(2) \qquad \alpha_{pq} = \alpha_{qp}.$$

En effet, considérons les deux états successifs où chacun des conducteurs A_p et A_q est seul chargé de l'unité d'électricité, tous les autres étant à l'état neutre; l'application du théorème de Gauss (**62**) donne immédiatement la relation (2).

La remarque faite plus haut (**67**) montre que tous les coefficients α sont positifs et qu'un coefficient tel que α_{qp} n'est jamais supérieur à α_{pp} ou α_{qq}.

69. — Si l'on résout les équations (1) par rapport aux charges, on aura n équations de la forme

$$(3) \qquad M_p = \gamma_{p1}V_1 + \gamma_{p2}V_2 \cdots\cdots + \gamma_{pn}V_n,$$

contenant n^2 coefficients dont la signification est évidente.

Le coefficient γ_{pp} exprime la charge qu'il faut donner au

conducteur A_p pour le porter au potentiel *un*, tous les autres étant au potentiel zéro. Ce coefficient, qui joue un grand rôle dans la théorie de l'électricité, est appelé la *capacité* du conducteur A_p; nous y reviendrons dans un instant. Un coefficient tel que γ_{qp} exprime la charge que prend, en même temps, par induction, le conducteur A_q en communication avec le sol; on pourrait l'appeler le *coefficient d'électricité induite* sur A_q par A_p.

L'application du théorème de Gauss, dans le cas de deux états successifs où chacun des conducteurs A_p et A_q est porté au potentiel *un*, les autres communiquant avec le sol, montre que ces coefficients sont encore égaux deux à deux et qu'on a la relation

$$(4) \qquad \gamma_{pq} = \gamma_{qp},$$

qui n'est qu'une extension du théorème démontré plus haut (**63**) pour deux conducteurs.

Si on se reporte à la remarque du n° **66**, il est facile de voir que, tandis que les coefficients γ_{pp}, qui expriment les capacités, sont tous positifs, les coefficients d'électricité induite, tels que γ_{pq}, sont tous négatifs; de plus, que la somme de tous ceux qui sont relatifs à l'induction exercée par un même conducteur n'est jamais supérieure, en valeur absolue, à la capacité de ce conducteur lui-même. Par exemple, on a

$$\gamma_{pp} > -[\gamma_{1p} + \gamma_{2p} \cdots\cdots + \gamma_{np}],$$

à moins que l'un des conducteurs A_q en communication avec le sol n'enveloppe complètement le conducteur A_p. Dans ce cas, on aurait

$$\gamma_{pp} = -\gamma_{qp},$$

et les $n-2$ autres coefficients relatifs au conducteur A_p, γ_{1p}, $\gamma_{2p} \cdots\cdots \gamma_{np}$, seraient nuls.

70. Analogies du problème de l'équilibre électrique. — Il est intéressant de rapprocher du problème que nous venons de traiter, deux autres problèmes relatifs à des phénomènes tout différents, mais qui, au point de vue analytique, pré-

sentent l'analogie la plus complète : celui de la propagation uniforme de la chaleur dans un milieu homogène et celui du mouvement permanent d'un liquide incompressible et sans frottement.

En résumé, le problème électrique est caractérisé par l'existence d'une fonction des coordonnées V qui, s'annulant à l'infini, a une valeur constante sur chacun des conducteurs, et satisfait pour tout point du diélectrique à la relation

$$\Delta V = 0,$$

dont la signification physique est très simple. X, Y et Z étant les composantes de la force en un point P, la quantité

$$\Delta V = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

représente le flux total de force qui sort d'un élément de volume pris en ce point, et l'équation $\Delta V = 0$ exprime que ce flux est nul dans le diélectrique ou à l'intérieur d'un conducteur, c'est-à-dire là où il ne se trouve pas d'électricité.

Imaginons maintenant que, dans un problème d'électricité statique, on remplace le milieu isolant par un milieu conducteur de la chaleur homogène et *isotrope*, c'est-à-dire qui jouisse des mêmes propriétés dans toutes les directions, et chacun des conducteurs électrisés par des sources qui dégagent ou absorbent de la chaleur, de manière à maintenir sur les surfaces des températures constantes, égales respectivement en valeur numérique aux potentiels primitifs, de sorte que pour chacun de ces conducteurs on ait $t = V$.

Une fois l'équilibre établi, chaque point du milieu sera à une température déterminée et on pourra tracer des surfaces *isothermes*, c'est-à-dire d'égale température ou d'égal niveau thermique. Il est évident que la température d'un point P compris entre deux surfaces isothermes S et S′ est indépendante de la situation des sources, et qu'elle resterait la même, ces sources étant supprimées, si on maintenait constantes d'une autre manière les températures t et t' de ces deux surfaces.

L'hypothèse de Fourier consiste d'abord à admettre, ce que l'on peut considérer comme la simple traduction des faits, que la chaleur se propage de proche en proche, que l'état thermique d'un point n'a d'influence sensible que sur les points très voisins et que les points les plus chauds tendent à élever la température des points les plus froids. Fourier admet, en outre, ce qui est moins évident, que les échanges de chaleur ne dépendent que des différences de température et non de leurs valeurs absolues.

Le flux de chaleur qui traverse un élément dS d'une surface isotherme S (fig. 14) est, par raison de symétrie, normal à cette surface et à toutes les surfaces isothermes qu'il rencontre. Le flux de chaleur dQ qui, dans l'unité de temps, va de l'élé-

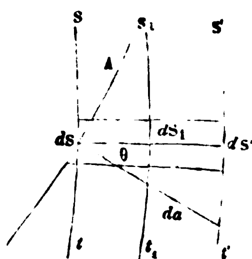


Fig. 14

ment dS à l'élément dS' infiniment voisin, est proportionnel à la surface dS, à la différence infiniment petite de température $t-t'$, à un coefficient h qui ne dépend que de la nature du milieu, enfin à une fonction de la distance de ces éléments.

On peut donc écrire

$$dQ = h\,dS\frac{t-t'}{\varphi(e)}.$$

Si l'on considère une surface intermédiaire S_1 à la température t_1, le flux de chaleur qui va de dS en dS' passe d'abord par l'élément dS_1 à la distance e_1, ce qui donne

$$dQ = h\,dS\frac{t-t_1}{\varphi(e_1)} = h\,dS\frac{t-t'}{\varphi(e)}.$$

Comme les différences de température $t - t_1$ et $t - t'$ sont proportionnelles aux distances normales, par raison de continuité, la fonction φ est simplement proportionnelle à la distance. Le flux de chaleur entre deux éléments correspondants infiniment voisins, en appelant dt la variation de température comptée dans le sens du flux de chaleur et dn la distance des éléments, peut donc être exprimée par la formule suivante :

$$dQ = -k dS \frac{dt}{dn}.$$

Le coefficient k est le *coefficient de conductibilité* du milieu. Il représente le flux de chaleur par unité de surface entre deux plans parallèles distants de l'unité et dont la différence de température serait de 1°.

Dans le cas actuel, le flux par unité de surface en chaque point a pour valeur

$$Q = -k \frac{dt}{dn};$$

il est proportionnel à la dérivée du potentiel par rapport à la normale à la surface de niveau correspondante.

Le flux de chaleur est le même au travers d'un élément dA d'une surface quelconque A limité au même canal. En appelant θ l'angle que fait cet élément avec la surface de niveau et da la portion de la normale à l'élément dA comprise entre les surfaces S et S', on a

$$dQ = -k dA \cos\theta \frac{dt}{dn} = -k dA \frac{dt}{dn} \cdot \frac{dn}{da} = -k dA \frac{\partial t}{\partial a}.$$

Le flux de chaleur au travers d'un élément de surface quelconque est donc proportionnel à la dérivée partielle de la température dans le milieu par rapport à la normale à cette surface.

Puisque l'équilibre est établi, le flux total de chaleur correspondant à une surface fermée quelconque ne renfermant

pas de sources doit être nul. Soient u, v et w les composantes du flux en un point P, et $dxdydz$ un élément de volume au même point; le flux qui entre par l'une des surfaces $dydz$ est $udydz$, celui qui sort par la surface opposée est égal à $\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dydz$, la différence est $dxdydz\,\frac{\partial u}{\partial x}$; le flux total correspondant à la surface entière de l'élément est donc

$$dxdydz\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

comme ce flux doit être nul, il en résulte

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-\Delta t=0.$$

Il est évident d'ailleurs que l'action du système n'est plus sensible à de grandes distances et que la température t qu'il détermine est nulle à l'infini.

La fonction t satisfait donc, pour chaque point du milieu et pour les limites, aux mêmes conditions que la fonction V. On voit, de plus, que si la constante k est égale à l'unité, les valeurs numériques du flux de force électrique et du flux de chaleur pendant l'unité de temps sont en chaque point identiques dans les deux problèmes.

71. — Considérons maintenant le problème correspondant d'hydrodynamique. Supposons que l'espace occupé primitivement par le diélectrique soit rempli par un liquide incompressible et sans frottement; supposons, en outre, que les conducteurs soient remplacés par des surfaces poreuses de telle sorte que le liquide ait en chaque point de leur surface une vitesse normale et égale à la valeur primitive de la force électrique au même point. L'ensemble des trajectoires des molécules qui ont traversé au même instant l'élément dS de la surface d'un conducteur forment un *filet liquide*, qui s'en détache normalement et présente le même débit dans toutes les sections. Comme il n'y a nulle part accumulation de liquide, le flux qui pénètre dans un élément de volume $dxdydz$

pris en un point quelconque P est égal à celui qui en sort; or, si on désigne par u, v, w les composantes de la vitesse au point P, cette condition s'exprime par l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Le mouvement est d'ailleurs insensible à l'infini ; on voit donc que la vitesse en chaque point dépend d'une fonction des coordonnées satisfaisant aux mêmes conditions que le potentiel ou la température. Partout les lignes de flux coïncideront avec les lignes de force du problème électrique correspondant et en chaque point la force électrique et la vitesse du liquide auront la même valeur numérique.

La corrélation que nous venons d'établir présente un grand intérêt ; car, s'il est clair que les difficultés analytiques sont exactement les mêmes dans les trois espèces de problèmes, il n'en est pas moins vrai que certaines conséquences se présentent d'une façon plus naturelle dans un ordre d'idées que dans un autre et il est évident que tout résultat obtenu dans un cas peut être immédiatement transporté, avec sa traduction spéciale, dans les deux autres. On en trouvera plusieurs exemples par la suite.

72. Capacités électriques. — Nous avons appelé (**69**) *capacité d'un conducteur, la charge qu'il faut lui communiquer pour le porter au potentiel* un, *quand tous les conducteurs qui l'entourent sont en communication avec le sol.*

Il résulte de cette définition que la capacité d'un conducteur dépend non seulement de sa forme, mais de la forme et de la position de tous les conducteurs qui l'entourent.

Nous représenterons cette constante par la lettre C. Si, les conditions restant les mêmes, on donne au conducteur une charge M, son potentiel sera évidemment, en vertu du principe de la superposition des états d'équilibre,

$$V=\frac{M}{C};$$

on en déduit

$$M=CV.$$

Le problème qui consiste à déterminer la capacité d'un conducteur, dans une circonstance donnée, revient à chercher l'état de l'équilibre du système formé par le conducteur en question et tous les conducteurs qui l'entourent, ceux-ci étant en communication avec le sol; il se confond donc avec le problème général de l'équilibre.

Le mot *capacité* a été emprunté, par analogie, à la théorie de la chaleur; mais il est important de remarquer que, tandis que la capacité calorifique d'un corps ne dépend que de la nature et du poids de ce corps, la capacité électrique d'un conducteur ne dépend ni de sa nature, ni de son poids, mais seulement de sa forme extérieure et de la forme et de la position de tous les conducteurs voisins. La capacité électrique n'est donc point, comme la capacité calorifique, une constante fixe pour le corps considéré.

73. Sphère. — Considérons une sphère conductrice extrêmement éloignée de tout autre conducteur. Soit R son rayon, M sa charge. Par raison de symétrie, cette charge forme à la surface une couche uniforme; elle satisfait d'ailleurs aux conditions d'équilibre, car son action sur tout point intérieur est nulle (41). Le potentiel est donc constant dans tout l'intérieur: sa valeur au centre est $\frac{M}{R}$; par suite,

$$V=\frac{M}{R} \quad \text{ou} \quad M=RV.$$

La capacité de la sphère est donc

$$C=R;$$

elle est égale au rayon. Cet exemple fait voir que la capacité électrostatique d'un conducteur est une quantité *linéaire*.

74. Ellipsoïde. — Si un conducteur terminé par la surface d'un ellipsoïde est couvert d'une couche électrique homogène limitée elle-même par une seconde surface ellipsoïdale concentrique et homothétique à la première, l'action de la couche sur un point intérieur quelconque P est nulle.

Supposons, en effet, cette couche très mince et menons par le point P (fig. 15) un cône infiniment petit $d\omega$, qui découpe en M à la distance u un élément de surface dS et dans la couche un élément de volume dont la hauteur suivant le rayon vecteur est du. L'action en P de cet élément de volume est dirigée suivant le rayon vecteur et a pour valeur, en appelant ρ la densité,

$$\frac{\rho . u^2 d\omega . du}{u^2} = \rho d\omega du.$$

L'action de l'élément opposé situé en M' est aussi $\rho d\omega du'$.

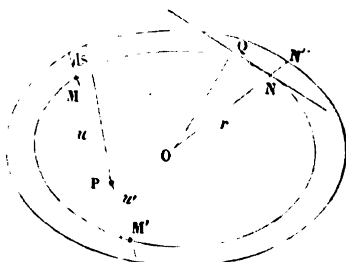


Fig. 15

Comme les hauteurs du et du' sont égales et les forces directement opposées, leur résultante est nulle; il en est de même pour tous les éléments de surface deux à deux et l'action de la couche entière sur le point P est nulle. Une couche électrique distribuée suivant cette loi sur un ellipsoïde sera donc en équilibre et aura à l'intérieur un potentiel constant.

Soit $(1 + \alpha)$ le rapport de similitude des deux surfaces supposées très voisines. L'épaisseur de la couche en un point N est proportionnelle à la distance des plans tangents aux deux points homologues N et N', et égale à $p\alpha$, p désignant la perpendiculaire OQ abaissée du centre commun O sur le plan tangent en N; la densité superficielle σ a pour valeur

$$\sigma = \rho p \alpha.$$

L'ellipsoïde étant représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

la masse totale d'électricité est

$$M=\frac{4}{3}\pi abc[(1+\alpha)^3-1]\rho=4\pi abc\rho\alpha.$$

On en déduit

$$\sigma=\frac{M}{4\pi abc}.p=\frac{M}{4\pi abc}.\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Le potentiel intérieur étant constant, il suffit d'en calculer la valeur au centre. On a donc, en appelant r le rayon ON,

$$V=\int\frac{\sigma dS}{r}=\frac{M}{4\pi abc}.\int\frac{pdS}{r},$$

et la capacité de l'ellipsoïde est donnée par l'équation

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{4\pi abc}\int\frac{pdS}{r}.$$

75. — Pour un ellipsoïde à trois axes inégaux, la capacité est une fonction elliptique, mais elle peut être obtenue facilement dans le cas d'un ellipsoïde de révolution.

Prenons comme élément de surface dS la zone décrite par un élément ds de la courbe méridienne et supposons que l'axe a soit l'axe de rotation. On a alors

$$dS=2\pi y\,ds=\frac{2\pi y\,dx}{\left(\frac{dx}{ds}\right)}=\frac{2\pi y\,dx}{\frac{py}{b^2}}=\frac{2\pi b^2}{p}dx,$$

ou

$$pdS=2\pi b^2dx.$$

Cette relation montre déjà que la charge totale d'électricité est la même sur toutes les zones d'égale hauteur. Sur un ellipsoïde très allongé en forme de double pointe, on peut donc dire que la densité linéaire est constante (1).

On en déduit, pour la capacité de l'ellipsoïde,

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{4\pi abc}\int\frac{p\,dS}{r}=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Si l'ellipsoïde est de révolution autour du grand axe, on a, en appelant e l'excentricité et C_1 la capacité,

$$\frac{1}{C_1}=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a}\frac{dx}{\sqrt{b^2+e^2x^2}}=\frac{1}{2ae}\left\{ l.\left[ex+\sqrt{b^2+e^2x^2}\right]\right\}_{-a}^{+a}$$
$$=\frac{1}{2ae}\,l.\frac{1+e}{1-e}.$$

Si l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe b, la capacité C_2 est alors

$$\frac{1}{C_2}=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{+b}\frac{dy}{\sqrt{a^2-\frac{a^2e^2}{b^2}y^2}}=\frac{1}{2ae}\left[\arcsin\frac{ey}{b}\right]_{-b}^{+b}=\frac{\arcsin e}{ae}.$$

Chacune de ces formules donne

$$C_1=C_2=a,$$

lorsque l'excentricité est nulle, c'est-à-dire quand l'ellipsoïde devient une sphère.

(1) Cette remarque permet d'expliquer le *pouvoir des pointes*. Sur un ellipsoïde très allongé en forme de double pointe, on voit que la densité superficielle est en raison inverse du diamètre et croît toujours à mesure qu'on s'approche de l'extrémité. Si le pouvoir isolant de l'air était lui-même sans limite, la densité et la tension, qui est proportionnelle au carré de la densité, pourraient croître jusqu'à l'infini. Mais en réalité, quand pour une pression donnée de l'air la tension a atteint une certaine valeur, l'électricité passe du conducteur sur les masses d'air qui l'entourent, et celles-ci chargées d'électricité s'échappent d'abord suivant la direction des lignes de force en produisant les phénomènes connus du *vent électrique* et de l'*aigrette*.

76. — Un plateau elliptique peut être considéré comme un ellipsoïde très aplati. On a alors, à la limite,

$$\lim.\left(\frac{p}{c}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}.$$

La densité sur le plateau a pour expression

$$\sigma=\frac{M}{4\pi ab}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},$$

et l'on voit que les lignes d'égale densité sont des ellipses concentriques et homothétiques.

Pour un plateau circulaire on a simplement, à une distance r du centre,

$$\sigma=\frac{M}{4\pi a^2}.\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2}{a^2}}}=\frac{M}{4\pi a\sqrt{a^2-r^2}},$$

et la capacité du plateau se réduit à

$$C=\frac{2a}{\pi}=\frac{a}{1,571}.$$

77. Sphères concentriques. — Supposons qu'une sphère conductrice soit entourée d'un conducteur terminé par deux surfaces sphériques concentriques à la première.

Soit R le rayon de la sphère A (fig. 16), R_1 et R_2 ceux de l'enveloppe concentrique B, que nous supposerons d'abord isolée. Si la sphère A reçoit une charge électrique M, l'enveloppe B prend (58) une charge égale à $-M$ sur sa surface intérieure S_1 et une charge $+M$ sur sa surface extérieure S_2. Le potentiel au centre de la sphère A a évidemment pour valeur

$$V=\frac{M}{R}-\frac{M}{R_1}+\frac{M}{R_2}=M\left[\frac{1}{R}-\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right].$$

La capacité C de la sphère intérieure étant la charge qui correspond à $V=1$, on a

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{R}-\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Les deux couches, $+M$ sur la sphère A et $-M$ sur la surface S_1, ont un potentiel nul à l'extérieur. Le potentiel V_1 de l'enveloppe B dépend donc seulement de la couche exté-

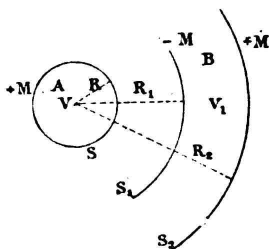


Fig. 16

rieure $+M$ et il est le même qu'au centre de la sphère S_2 supposée homogène, ce qui donne

$$V_1=\frac{M}{R_2}.$$

Si l'enveloppe B communique avec le sol, son potentiel devient nul, la charge extérieure $+M$ disparaît et la capacité de la sphère est alors

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}=\frac{e}{RR_1},$$

en appelant e l'épaisseur du diélectrique.

Si l'épaisseur du diélectrique est petite par rapport au rayon de la sphère, on peut négliger la différence entre R_1 et R, et prendre $\frac{R^2}{e}$ au lieu de $\frac{RR_1}{e}$ pour la capacité. Si l'on exprime cette capacité en fonction de la surface S de la sphère, on

obtient

$$C = \frac{R^2}{e} = \frac{4\pi R^2}{4\pi e} = \frac{S}{4\pi e}.$$

La charge nécessaire pour porter la sphère au potentiel V a pour expression

$$M = \frac{SV}{4\pi e}.$$

On voit que, dans tous les cas, l'enveloppe concentrique, augmentant la capacité de la sphère, a pour effet de diminuer le potentiel relatif à une charge donnée ou, inversement, d'augmenter la charge relative à un potentiel donné.

78. Condensateurs. — La présence de l'enveloppe permet donc d'accumuler ou de condenser sur la sphère A, pour un même potentiel, une quantité d'électricité plus grande que si cette enveloppe n'existait pas. Le même effet serait produit sur un conducteur quelconque A par la présence d'un second conducteur B en communication avec le sol, ou isolé mais avec une charge nulle, puisque ce conducteur diminue la valeur du potentiel de A pour une charge donnée. On donne le nom de *condensateur* à un ensemble de conducteurs séparés par un diélectrique et disposés de manière à augmenter dans une proportion notable la capacité de l'un d'eux. Dans le cas actuel, la sphère et son enveloppe constituent ce qu'on appelle les *armatures* du condensateur, la sphère A étant le *collecteur* et l'enveloppe B le *condenseur*.

La *force condensante* d'un condensateur est le rapport qui existe entre la charge du collecteur lorsqu'il fait partie de l'appareil de condensation, et la charge qu'il prendrait pour le même potentiel, s'il était éloigné de tout autre conducteur; c'est donc le rapport des capacités du collecteur dans ces deux circonstances. Dans le condensateur sphérique à surfaces concentriques, dont l'armature extérieure communique au sol, la force condensante a pour valeur

$$\frac{C}{R} = \frac{R}{e}.$$

La force condensante ne présente d'ailleurs aucun intérêt dans les applications ; la seule grandeur qu'il importe de connaître, c'est la capacité d'un condensateur.

78. Bouteille de Leyde. — On appelle *bouteille de Leyde* un flacon de verre dont on a couvert par une feuille métallique la surface intérieure et la surface extérieure, en laissant le verre à nu au voisinage de l'ouverture, pour que les feuilles métalliques ne communiquent pas entre elles. Une tige conductrice passant par le goulot de la bouteille correspond avec l'armature intérieure.

L'ensemble de ces deux surfaces conductrices et de la lame diélectrique constitue un condensateur presque fermé.

Le problème précédent correspond au cas d'une bouteille sphérique d'épaisseur constante ; la petite zone qu'on est obligé de supprimer sur la surface extérieure, pour permettre

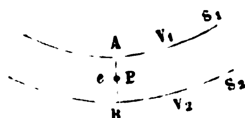


Fig. 17

la communication avec l'intérieur, n'a qu'une influence négligeable ; la capacité est donc représentée par $\frac{S}{4\pi e}$ et la charge par la formule

$$M = \frac{SV}{4\pi e}.$$

Il est facile de voir que cette formule s'applique également à une bouteille de Leyde de forme quelconque, d'épaisseur constante très petite, dont les armatures couvrent toute la surface à l'intérieur et à l'extérieur.

Soient S_1 et S_2 (fig. 17) les surfaces opposées des deux armatures, V_1 et V_2 leurs potentiels. L'armature extérieure entourant complètement l'armature intérieure, les masses électriques sur ces deux surfaces sont égales et de signes contraires (**57**). Pour un point P du diélectrique, la force

a pour valeur, en appelant σ la densité en A de la couche interne,

$$F = -\frac{dV}{dn} = 4\pi\sigma.$$

Comme l'épaisseur e est supposée très petite, la dérivée $\frac{dV}{dn}$ est sensiblement égale à $\frac{V_2 - V_1}{e}$, ce qui donne

$$e = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{V_1 - V_2}{e}.$$

La charge d'un élément dS de la surface est σdS, et la charge totale a pour expression

$$M = \int \sigma dS = \frac{V_1 - V_2}{4\pi} \int \frac{dS}{e}.$$

Si l'épaisseur e est constante, il vient simplement, en posant $V = V_1 - V_2$,

$$M = \frac{V_1 - V_2}{4\pi} \cdot \frac{S}{e} = \frac{VS}{4\pi e}.$$

La capacité de la bouteille, c'est-à-dire la charge qui correspond à une différence de potentiel égale à l'unité entre les armatures, a donc la même expression que pour les condensateurs sphériques, c'est-à-dire

$$C = \frac{S}{4\pi e}.$$

La charge ne dépend que de la différence des potentiels et nullement de leurs valeurs absolues ; ce résultat était facile à prévoir puisque la force elle-même ne dépend que de cette différence.

80. Cylindres concentriques circulaires. — Soient deux cylindres concentriques à bases circulaires de rayons R_1 et R_2 aux potentiels V_1 et V_2. Considérons l'angle formé par deux

plans passant par l'axe et laissant entre eux un angle infiniment petit $d\omega$, et coupons-le par deux plans perpendiculaires à l'axe, dont nous prendrons l'un pour le plan de la figure (fig. 18). Toutes les lignes de force étant normales à l'axe commun, par raison de symétrie, le volume ainsi déterminé est un tube de force; les surfaces qu'il intercepte sur les deux cylindres sont entre elles comme les arcs dS_1 et dS_2. Si

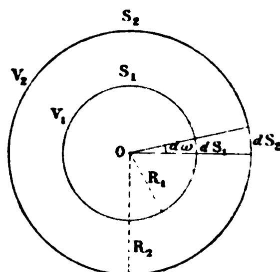


Fig. 18

donc F_1 et F_2 sont les valeurs de la force aux distances R_1 et R_2, on a

$$F_1 dS_1 = F_2 dS_2.$$

Comme d'ailleurs

$$d\omega = \frac{dS_1}{R_1} = \frac{dS_2}{R_2},$$

on obtient, en substituant,

$$F_1 R_1 d\omega = F_2 R_2 d\omega, \qquad \text{ou} \qquad F_1 R_1 = F_2 R_2 = A.$$

La force en un point quelconque du diélectrique est donc en raison inverse de la distance à l'axe.

Si l'on désigne par F la force et V le potentiel à une distance quelconque R, on a donc

$$F = \frac{A}{R} = -\frac{dV}{dR},$$

et, par suite,

$$V = -A \int \frac{dR}{R}.$$

En étendant cette intégrale au volume compris entre les surfaces S_1 et S_2 il vient

$$V_2 - V_1 = -Al.R_2 + Al.R_1 = -Al.\frac{R_2}{R_1}.$$

On en déduit, pour la constante A,

$$A = \frac{V_1 - V_2}{l.\frac{R_2}{R_1}}.$$

D'autre part, la densité électrique σ à la surface du cylindre intérieur a pour expression

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}F_1 = \frac{A}{4\pi R_1} = \frac{1}{4\pi R_1}.\frac{V_1 - V_2}{l.\frac{R_2}{R_1}}.$$

Soit S l'étendue de la surface comprise entre les deux plans normaux à l'axe; la masse M d'électricité répandue sur cette surface est

$$M = S\sigma = \frac{(V_1 - V_2)S}{4\pi R_1 l.\frac{R_2}{R_1}}.$$

Si L est la longueur du cylindre ainsi déterminé,

$$S = 2\pi R_1 L,$$

ce qui donne finalement

$$M = \frac{L}{2l.\frac{R_2}{R_1}}(V_1 - V_2).$$

La capacité d'un condensateur cylindrique par unité de longueur est donc

$$C = \frac{1}{2l.\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Ce problème est très important pour la pratique, parce qu'il correspond précisément au cas des câbles télégraphiques, qui sont formés de fils conducteurs entourés d'une couche isolante garantie elle-même par une armature métallique.

81. Condensateurs plans. — Considérons deux conducteurs terminés par des surfaces planes parallèles S_1 et S_2 à la distance e et aux potentiels V_1 et V_2 (fig. 19). A une distance des bords très grande par rapport à l'épaisseur du diélectrique, les lignes de force sont des droites parallèles entre elles, normales aux surfaces considérées.

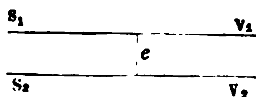


Fig. 19

Le champ électrique entre les deux plans est donc uniforme ; la force a pour expression

$$F = \frac{V_1 - V_2}{e},$$

et la densité sur la surface S_1 est

$$\sigma = \frac{F}{4\pi} = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e}.$$

La pression électrostatique (40), c'est-à-dire la force qui s'exerce sur l'unité de surface, est

$$p = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{e}\right)^2;$$

elle est proportionnelle au carré de la différence de potentiel et en raison inverse du carré de la distance.

Si une partie de la surface S_1 d'étendue a, située à une grande distance des bords, est seule mobile et que, communiquant toujours avec la surface générale pour conserver le même

potentiel, elle soit maintenue dans le même plan par une force antagoniste, cette surface a aura une couche électrique uniforme, et la force P nécessaire pour résister à l'attraction électrique a pour expression

$$P = pa = \frac{a}{8\pi} \cdot \left(\frac{V_1 - V_2}{e}\right)^2.$$

Sir W. Thomson a utilisé cette propriété dans la construction de ses électromètres absolus; il appelle *plateau de garde* (guard-plate) la portion de la surface S_1 qui entoure la partie mobile pour y maintenir une densité constante.

82. — Supposons maintenant qu'un plateau A conducteur, au potentiel V_1 (fig. 20), soit placé entre deux conducteurs B et B′ terminés par des surfaces parallèles à celles du plateau,

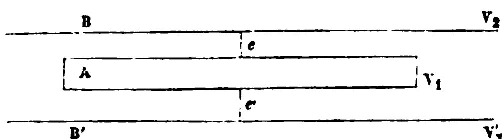


Fig. 20

l'un à la distance e et au potentiel V_2, l'autre à la distance e' et au potentiel V'_2.

La densité sur le conducteur A, à une grande distance des bords, est $\frac{V_1 - V_2}{4\pi e}$ pour la face supérieure, et $\frac{V_1 - V'_2}{4\pi e'}$ pour la face inférieure, de sorte que la charge qui correspond à l'unité de surface du plateau est

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{e} + \frac{V_1 - V'_2}{e'}\right).$$

En négligeant la variation de densité sur les bords, la charge totale du plateau A d'étendue S est donc

$$M = \frac{S}{4\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{e} + \frac{V_1 - V'_2}{e'}\right).$$

Si les potentiels V_2 et V'_2 sont égaux, on a simplement

$$M=\frac{(V_1-V_2)S}{4\pi}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e'}\right),$$

de sorte que la capacité de ce condensateur est

$$C=\frac{S}{4\pi}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e'}\right),$$

expression conforme à celle que nous avons obtenue déjà (79) pour les condensateurs fermés.

83. Capacité d'un ensemble de conducteurs. — Considérons différents conducteurs dont les capacités électriques sont $C, C', C'', \ldots\ldots$ disposés de manière que leur influence réciproque soit nulle. Tous ces conducteurs étant électrisés au même potentiel, si on les réunit à l'aide de conducteurs dont la capacité est négligeable, par exemple des fils fins, il n'y aura aucun échange électrique entre eux, puisqu'ils étaient au même potentiel, et ce potentiel ne changera pas.

Ils constituent alors un conducteur unique dont la charge est égale à la somme des charges primitives. La capacité électrique de l'ensemble C_1 est donc égale à la somme des capacités des conducteurs séparés.

Supposons que les potentiels des conducteurs primitifs soient différents $V, V', V'', \ldots\ldots$ les charges correspondantes sont

$$M=VC, \quad M'=V'C', \quad M''=V''C'' \ldots\ldots$$

Toutes ces charges étant distribuées normalement sur le conducteur unique formé par l'ensemble, y produiront un potentiel V_1 donné par l'équation

$$V_1C_1=VC+V'C'+V''C''+\ldots\ldots,$$

ou

$$V_1=\frac{VC+V'C'+V''C''+\ldots\ldots}{C+C'+C''+\ldots\ldots}.$$

Cette expression est fréquemment utilisée dans les recherches expérimentales. On remarquera l'analogie qu'elle présente avec la relation qui lie les températures et les capacités calorifiques lorsqu'on fait le mélange de plusieurs corps à températures différentes.

84. Batteries. — On appelle ainsi le système formé par plusieurs bouteilles de Leyde ou condensateurs quelconques communiquant entre eux.

Si ces condensateurs sont sensiblement fermés, comme les bouteilles de Leyde ordinaires, l'action extérieure de chacun d'eux est inappréciable et on peut les rapprocher sans qu'il y ait entre eux d'influence réciproque.

La communication peut se faire de deux manières :

1° On réunit, d'une part, toutes les armatures intérieures entre elles et, d'autre part, toutes les armatures extérieures; on dit alors que la batterie est disposée en *surface*. L'ensemble constitue un condensateur dont la capacité est égale à la somme des capacités de tous les bouteilles séparées. Si la batterie renferme p bouteilles identiques de capacité C, la capacité C_1 de la batterie est

$$C_1 = pC.$$

2° Toutes les bouteilles étant isolées, on réunit l'armature extérieure de chacune d'elles avec l'armature intérieure de la suivante; on charge l'armature intérieure de la première bouteille au potentiel V_1, l'armature extérieure de la dernière étant au potentiel V_2 et toutes les armatures intermédiaires restent isolées ; c'est la disposition en *série* ou en *cascade*.

85. Charge en cascade. — La première bouteille reçoit sur son armature intérieure une charge m et prend un potentiel V_1 ; il se produit sur la surface en regard de l'armature extérieure une charge $-m$ égale et contraire. Le conducteur formé par cette armature et l'armature intérieure de la seconde bouteille étant resté isolé, il prend une charge $+m$ qui se distribue normalement sur ce conducteur, comme si les charges internes n'existaient pas, et y établit un potentiel V'. La plus grande partie de cette charge se porte sur l'arma-

ture interne de la seconde bouteille dont la capacité est considérable par rapport au reste du conducteur considéré. En continuant le raisonnement, on voit que les armatures intérieures de toutes les bouteilles ont des charges successivement décroissantes, mais la diminution est très lente et on peut considérer toutes les bouteilles comme ayant la même charge interne $+m$, les potentiels successifs étant $V_1, V', V'', \ldots V_2$.

Si la batterie renferme p bouteilles, on peut donc écrire

$$m = C(V_1 - V') = C'(V' - V'') = \ldots\ldots = C^{(p-1)}(V^{(p-1)} - V_2),$$

ou

$$\frac{m}{C} = V_1 - V',$$
$$\frac{m}{C'} = V' - V'',$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{m}{C^{(p-1)}} = V^{(p-1)} - V_2.$$

Ajoutant toutes ces équations membre à membre, il vient

$$m\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} \cdots\cdots\right) = V_1 - V_2.$$

Ainsi la charge de la première bouteille du système, la seule qui reçoive directement de l'électricité, est

$$m = \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} \cdots\cdots}.$$

On a donc, pour la capacité C_1 de la batterie,

$$C_1 = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \cdots\cdots},$$
$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} + \frac{1}{C''} + \cdots\cdots$$

Si les p bouteilles sont identiques, la capacité de la batterie est devenue p fois plus faible que celle de chacune des bouteilles.

Cet arrangement paraît défectueux puisqu'il a pour effet de diminuer beaucoup la capacité de la batterie ; toutefois il présente des avantages précieux dans certaines expériences. Les bouteilles de Leyde ne peuvent supporter qu'une différence de potentiel limitée, au delà de laquelle la décharge s'effectue directement entre les armatures le long de la surface du verre et quelquefois à travers le verre lui-même qui est alors percé par une étincelle. A l'aide d'une batterie en cascade, on peut distribuer la différence totale de potentiel par échelons sur les bouteilles successives.

Telle est, par exemple, la disposition adoptée pour les machines de Holtz ordinaires, où l'on augmente la capacité des conducteurs en mettant chacun d'eux en communication avec l'armature intérieure d'une bouteille de Leyde; mais on a soin de réunir ces bouteilles en cascade, de manière à conserver la différence de potentiel maximum et, par suite, la distance explosive maximum que comporte le jeu de la machine.

Quand on dispose d'un grand nombre de bouteilles, on peut encore en former plusieurs batteries groupées en surface que l'on réunit ensuite en cascade. On utilise ainsi en totalité la différence de potentiel que peut fournir une machine, et on obtient le maximum d'effet avec la moindre dépense d'électricité.

86. Problème général de l'influence réciproque de deux conducteurs isolés. — Méthode de Murphy. — Pour déterminer la distribution de l'électricité sur deux conducteurs A et B isolés, chargés de masses totales M_a et M_b et soumis seulement à leur influence réciproque, il suffit de connaître pour chacun d'eux :

1° La capacité et la distribution à la surface quand il est isolé et soustrait à toute influence extérieure ;

2° La distribution de l'électricité induite sur la surface quand, mis en communication avec le sol, il est soumis à l'influence d'une masse électrique placée en un point quelconque à l'extérieur.

Soit m la capacité du conducteur A seul, c'est-à-dire la charge qui lui donnerait alors le potentiel *un*.

Fixons cette masse, dont la distribution est connue, et plaçons dans la position voulue le conducteur B en communication avec le sol. Celui-ci sera au potentiel zéro et se chargera d'une masse connue d'électricité contraire $-m'$.

Fixons de même la masse $-m'$ sur B. Isolons ce conducteur et mettons le premier en communication avec le sol; ce dernier prendra une masse m_1 au potentiel zéro.

Fixant de nouveau la masse $+m_1$ sur A, on obtiendra sur B une couche induite $-m''$, etc.

En continuant ainsi, on obtiendra successivement sur les deux conducteurs des masses $m, m_1, m_2 \ldots$ pour le premier, et $-m', -m'', -m''' \ldots$ pour le second, chacune d'elles tendant vers zéro assez rapidement.

La superposition de toutes les couches $m, m_1, m_2 \ldots$ sur A et de toutes les couches $-m', -m'', -m''' \ldots$ sur B donne un état d'équilibre avec un potentiel nul sur B et égal à l'unité sur A. En effet, les couches successives m et $-m'$, m_1 et $-m'', \ldots$ considérées deux à deux, donnent sur B un potentiel nul ; les couches $-m'$ et m_1, $-m''$ et $m_2, \ldots$ donnent de même sur A un potentiel nul. Il ne reste donc à considérer sur le premier conducteur que la masse m, laquelle produit un potentiel égal à l'unité.

En posant

$$C_a = m + m_1 + m_2 + \cdots\cdots,$$
$$C'_a = m' + m'' + m''' + \cdots\cdots,$$

on voit que C_a représente la capacité du conducteur A isolé, en présence du conducteur B réuni au sol et $-C'_a$ le coefficient d'électricité induite sur B (69).

Multiplions ces deux masses par V_a; les charges respectives $C_a V_a$ et $-C'_a V_a$ correspondent à un état d'équilibre avec un potentiel nul sur B et égal à V_a sur A.

Renversant le rôle des conducteurs, on obtiendra, de même, les masses $C_b V_b$ sur B et $-C'_b V_b$ sur A correspondant à un nouvel état d'équilibre, avec un potentiel nul sur A et égal à V_b sur B.

La superposition de ces deux états d'équilibre donne un nouvel état d'équilibre avec addition des potentiels sur chacun des conducteurs, c'est-à-dire le potentiel V_a sur A et V_b sur B. Les charges totales M_a et M_b des deux conducteurs sont alors

$$M_a = C_a V_a - C'_b V_b.$$
$$M_b = C_b V_b - C'_a V_a.$$

Ces équations permettent de calculer les masses totales des deux conducteurs quand on connaît les potentiels.

On peut aussi en déduire les potentiels en fonction des masses, ce qui donne

$$V_a = \frac{C_b M_a + C'_b M_b}{C_a C_b - C'_a C'_b},$$
$$V_b = \frac{C_a M_b + C'_a M_a}{C_a C_b - C'_a C'_b}.$$

87. Action réciproque de deux conducteurs électrisés. — La méthode précédente permet de déterminer la distribution de l'électricité sur les deux conducteurs, puisque la densité finale en chaque point est la somme des densités relatives aux différentes couches superposées, et que, par hypothèse, on connaît la loi de distribution pour chacune d'elles. On a donc tous les éléments nécessaires pour calculer l'action qui s'exerce entre les deux corps; le problème ne présente que des difficultés de calcul.

Cette force se compose de l'action de chacune des deux couches $C_a V_a$ et $-C'_b V_b$ du corps A sur les deux couches $C_b V_b$ et $-C'_a V_a$ du corps B. Les potentiels étant supposés positifs, l'action de $C_a V_a$ est formée de deux termes, l'un répulsif proportionnel au produit $V_a V_b$ des deux potentiels, l'autre attractif proportionnel à V_a^2.

L'action de $-C'_b V_b$ comprend aussi deux termes, l'un attractif proportionnel à V_b^2 et l'autre répulsif proportionnel au produit $V_a V_b$.

En désignant par a, b et c des coefficients qui dépendent de la forme des corps et de leur distance, l'action réciproque R,

considérée comme répulsive, a donc une expression de la forme suivante

$$R = 2cV_aV_b - aV_a^2 - bV_b^2.$$

Si les conducteurs A et B sont identiques et disposés symétriquement, les coefficients a et b sont égaux et la formule devient

$$R = 2cV_aV_b - a\left(V_a^2 + V_b^2\right).$$

Nous avons supposé que l'action des deux corps se réduit à une résultante unique. S'il en était autrement, le même raisonnement s'appliquerait aux deux résultantes par lesquelles on peut remplacer l'ensemble des forces.

En réalité les calculs que comporte cette méthode, pour déterminer les coefficients C_a, C_b, C_a et C'_b et la force résultante R, sont extrêmement pénibles, même dans les cas les plus simples. Nous indiquerons plus tard l'application qu'en a faite sir W. Thomson au calcul de l'influence réciproque de deux sphères.

CHAPITRE CINQUIÈME

TRAVAIL DES FORCES ÉLECTRIQUES

88. Énergie électrique. — Lorsqu'on met en communication avec le sol différents conducteurs électrisés, le système revient de lui-même à l'état neutre en produisant un travail qui est nécessairement positif. Un système quelconque de conducteurs électrisés possède donc une énergie disponible correspondant à ce travail ; c'est une énergie *potentielle*, que l'on peut appeler simplement *énergie électrique*.

L'électrisation d'un système exige la dépense d'une quantité de travail égale à l'énergie potentielle qu'il acquiert dans ce nouvel état.

Quand on établit une communication entre deux conducteurs, il se produit en général un changement dans la distribution des masses électriques, et cette modification correspond à un travail positif. L'énergie électrique d'un système de conducteurs est donc égale ou supérieure à celle du système que l'on obtiendrait en ajoutant des communications quelconques entre les conducteurs.

Lorsque le système renferme un corps isolant électrisé, on peut considérer les différentes masses électriques dont ce corps est chargé comme appartenant à des conducteurs infiniment petits. Si on relie entre elles toutes ces masses, l'énergie diminue. L'énergie d'un système de corps, dont chacun possède une masse totale déterminée, est donc minimum lorsque tous les corps sont conducteurs.

On peut évaluer l'énergie potentielle d'un système, soit par

le travail dépensé pendant l'électrisation, soit par le travail fourni dans la décharge.

89. Énergie d'un conducteur unique. — Considérons d'abord un conducteur unique de capacité C, et supposons qu'on lui ait déjà communiqué la charge M qui le porte au potentiel V. Pour augmenter la charge de dM, il faut amener de l'infini ou de la surface du sol, jusque sur ce conducteur, une quantité dM d'électricité, et le travail dépensé pour cette opération est égal à VdM.

L'accroissement dW de l'énergie du conducteur est donc

$$dW = V\,dM = \frac{M\,dM}{C}.$$

Lorsque la masse électrique change de M_0 à M_1, l'accroissement d'énergie est

$$W_1 - W_0 = \frac{1}{2C}\left(M_1^2 - M_0^2\right).$$

Comme l'énergie s'annule avec la masse, on voit que l'énergie qui correspond à la masse M est

$$W = \frac{M^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}MV.$$

Ainsi *l'énergie électrique d'un conducteur unique est proportionnelle au carré de la charge ou au carré du potentiel.*

90. Énergie d'un système de conducteurs. — Soit maintenant un nombre quelconque de conducteurs $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ayant des charges $M_1, M_2, M_3, \ldots$ avec des potentiels $V_1, V_2, V_3, \ldots$

Si l'on multiplie la densité en chaque point par x, on obtient un nouvel état d'équilibre dans lequel les charges totales et les potentiels sont multipliés par ce même facteur x. On a donc la charge xM_1 sur A_1 au potentiel xV_1, xM_2 sur A_2 au potentiel xV_2, etc.

En donnant à x l'accroissement dx, les masses et les potentiels sont multipliés par $x + dx$, et l'accroissement de charge qui en résulte sur le conducteur A_1 est $M_1 dx$. Le travail cor-

respondant est compris entre $M_1 dx . x V_1$ et $M_1 dx(x+dx) V_1$; il est donc, à un infiniment petit du second ordre près, égal à $M_1 V_1 x dx$. Il en est de même pour les autres conducteurs, de sorte que la variation d'énergie du système est

$$dW = (M_1 V_1 + M_2 V_2 + \ldots\ldots) x dx = x dx \sum MV.$$

Entre deux valeurs x_0 et x_1 l'accroissement d'énergie est

$$W_1 - W_0 = \frac{x_1^2 - x_0^2}{2} \sum MV.$$

Si l'on fait $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$, ce qui revient à supposer qu'on est parti de l'état neutre pour arriver à l'état considéré en premier lieu, il vient simplement

$$W = \frac{1}{2}(M_1 V_1 + M_2 V_2 + \ldots\ldots) = \frac{1}{2} \sum MV.$$

On voit, d'après cela, que *l'énergie d'un système de conducteurs est égale à la demi-somme des produits de chaque masse par le potentiel correspondant.*

91. — Un conducteur qui reste isolé pendant la charge s'est électrisé seulement par influence, et sa charge totale est toujours nulle ; il n'y a donc pas, dans la somme des produits, de terme qui corresponde à un conducteur isolé.

De même, un conducteur maintenu en communication avec le sol est resté au potentiel zéro et ne donne aucun terme dans l'expression de l'énergie.

Il faut remarquer cependant que ces deux sortes de conducteurs interviennent dans la valeur de l'énergie en modifiant par influence les capacités et, par suite, les potentiels des corps électrisés.

Enfin, la même formule convient aussi au cas des corps isolants électrisés d'une manière quelconque. Chacun des éléments de volume des corps isolants peut être considéré, en effet, comme un conducteur infiniment petit sur lequel serait distribuée la masse électrique correspondante. Dans ce cas, la

somme qui précède devient une intégrale ; en appelant ρ la densité électrique et V le potentiel sur un élément de volume dv, l'énergie du système a pour expression

$$W = \frac{1}{2}\int V dM = \frac{1}{2}\int V\rho dv.$$

L'énergie accumulée par l'électrisation sur un système de conducteurs est dépensée au moment de la décharge, et peut être transformée en un travail mécanique ou en un effet équivalent : chaleur dégagée, actions chimiques, etc.

92. — Si l'électricité était une substance matérielle, les masses qui constituent les couches électriques acquerraient pendant la décharge une certaine force vive, en vertu de laquelle elles dépasseraient, comme un pendule, leur position d'équilibre, de manière à restituer au système une fraction de l'énergie primitive ; il se produirait une succession de décharges alternativement de sens contraires jusqu'à ce que la chaleur dégagée sur les conducteurs ait épuisé l'énergie totale disponible, et l'équilibre final ne serait atteint qu'après un certain nombre d'oscillations. L'expérience montre que dans certaines conditions les décharges ont, en effet, un caractère oscillatoire manifeste ; mais nous verrons que ces oscillations peuvent s'expliquer par une cause toute différente. On n'en peut donc rien conclure en faveur de l'hypothèse qui attribuerait une certaine inertie aux masses électriques et, dans l'état actuel de la science, on ne peut invoquer aucun fait décisif pour ou contre cette hypothèse.

93. Décharge des batteries. — Batterie en surface. — *Décharge totale.* — Nous avons vu que la capacité C_1 d'une batterie disposée en surface est égale à la somme des capacités de chacune des bouteilles.

Si l'énergie totale de la batterie est transformée en chaleur pendant la décharge, on a donc, en appelant J l'équivalent mécanique de l'unité de chaleur et Q la chaleur dégagée,

$$W = \frac{1}{2}MV = \frac{1}{2}\frac{M^2}{C_1} = C_1V^2 = JQ.$$

Si la batterie est formée de p bouteilles identiques, de capacité C, la formule devient

$$W = JQ = \frac{1}{2p} \cdot \frac{M^2}{C} = \frac{1}{2} pCV^2.$$

On voit que, pour une charge donnée, l'énergie, ou la chaleur dégagée, est en raison inverse du nombre des bouteilles; et que, pour un potentiel donné, l'énergie est proportionnelle au nombre des bouteilles.

91. *Décharge incomplète.* — Considérons deux batteries de capacités C_1 et C_2, la première chargée d'une masse M et la seconde à l'état neutre, les armatures extérieures communiquant au sol. Supposons qu'au lieu de décharger la première, on joigne les deux armatures intérieures de manière à constituer une batterie unique de capacité $C_1 + C_2$. La décharge est dite *incomplète;* elle correspond à une perte d'énergie et produit un dégagement de chaleur. Avant le contact, l'énergie potentielle de la première batterie était

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_1}.$$

Après le contact, l'énergie du système est devenue

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C_1 + C_2}.$$

L'énergie dépensée dans la décharge est

$$W_1 - W_2 = \frac{M^2}{2} \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1 + C_2} \right) = \frac{M^2}{2C_1} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

La fraction dépensée de l'énergie primitive est donc

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{1 + \frac{C_1}{C_2}}.$$

Supposons que la première batterie se compose de p_1 bouteilles de surface S_1 et d'épaisseur e_1, la seconde de p_2 bouteilles de surface S_2 et d'épaisseur e_2, on aura

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{e_2}{e_1},$$

ce qui donne

$$\frac{W_1-W_2}{W_1}=\frac{1}{1+\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{e_2}{e_1}}.$$

95. Décharge d'une batterie en cascade. — La capacité C_1 d'une batterie disposée en cascade est liée aux capacités C, C′, C″... des diverses bouteilles isolées par la relation (85)

$$\frac{1}{C_1}=\frac{1}{C}+\frac{1}{C'}+\frac{1}{C''}+\dots\dots=\sum\frac{1}{C}.$$

L'expression de l'énergie potentielle du système ne comprend que le terme relatif à la première bouteille, puisque tous les autres conducteurs sont restés isolés ou en communication avec le sol pendant la charge. On a donc

$$W=\frac{1}{2}\frac{M^2}{C_1}=\frac{1}{2}C_1V^2.$$

Si la cascade se compose de p bouteilles identiques,

$$C_1=\frac{C}{p},$$

ce qui donne pour l'énergie

$$W=\frac{1}{2}p\frac{M^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{CV^2}{p}.$$

Pour une charge donnée, l'énergie de la cascade sera plus grande que celle d'une seule bouteille ; mais, pour un poten-

tiel donné, elle sera p fois plus petite. C'est l'inverse de ce qui avait lieu pour la batterie en surface.

Toutes ces lois relatives à la décharge des batteries ont été trouvées expérimentalement par M. Riess.

En résumé, quand on opère à potentiel constant, c'est-à dire avec une source d'électricité, la meilleure combinaison que l'on puisse faire avec un nombre déterminé de bouteilles, pour obtenir le maximum d'énergie pendant la décharge, consiste à les réunir en surface, pourvu toutefois que les bouteilles puissent supporter la différence de potentiel maximum de la source. Si, au contraire, on dispose d'une quantité d'électricité limitée, il y a tout avantage à mettre la batterie en cascade.

Le premier cas est le plus fréquent, c'est celui qui se présente avec les machines électriques; mais, comme ces appareils produisent habituellement des potentiels très élevés, il y a souvent intérêt à choisir une combinaison convenable des bouteilles suivant les deux systèmes, qui permette d'utiliser ces potentiels élevés et d'économiser la charge.

96. Travail électrique pendant le déplacement des conducteurs isolés. — *Conducteurs à charge constante.* — L'énergie potentielle d'un système de conducteurs a pour valeur

$$W = \frac{1}{2}\sum MV.$$

Lorsqu'on change la position relative de ces conducteurs, sans établir entre eux aucune communication, on provoque en général un travail positif ou négatif des forces électriques et, par suite, on fait varier l'énergie du système; si, par un travail extérieur, le système éprouve une déformation en sens contraire des actions électriques, l'énergie augmente d'une quantité correspondante.

Si les conducteurs sont abandonnés à eux-mêmes, ils obéissent aux actions électriques qui les sollicitent; le travail de ces forces est positif et correspond à une diminution d'énergie du système. On a donc, à chaque instant, en appelant dT le travail des forces électriques et dW la variation correspondante de l'énergie,

$$dW + dT = 0. \qquad (1)$$

L'énergie des conducteurs abandonnés à leurs actions réciproques tend donc vers un minimum.

On a d'ailleurs, d'une façon générale,

$$dW = \frac{1}{2}\sum M\,dV + \frac{1}{2}\sum V\,dM;$$

mais, dans le cas actuel, le dernier terme est nul puisque la charge M est constante sur chacun des conducteurs; il reste seulement

$$dW = \frac{1}{2}\sum M\,dV.$$

Le déplacement spontané tend donc à se faire de manière que les potentiels diminuent.

Un corps conducteur, primitivement à l'état neutre, serait attiré dans le champ électrique. Sa présence a donc pour effet, comme on le savait, de faire baisser les potentiels.

97. *Conducteurs à potentiel constant.* — Considérons maintenant le cas où les conducteurs sont maintenus à des potentiels constants, par des sources électriques placées en dehors du champ d'action.

Nous supposerons que les différents conducteurs A_1, A_2, A_3..., chargés de quantités M_1, M_2, M_3..., et aux potentiels V_1, V_2, V_3..., communiquent séparément avec des corps de capacités C_1, C_2, C_3..., soustraits à toute influence étrangère, par exemple, des condensateurs fermés dont l'armature extérieure communique avec le sol. Ce cas rentre alors dans celui que nous venons de considérer ; si on désigne par W_a l'énergie des conducteurs et par W_c celle des condensateurs, l'énergie du système est

$$W = W_a + W_c.$$

Si le système éprouve une déformation quelconque sans intervention d'énergie étrangère, la formule (1) est applicable et donne

$$(2) \qquad dT + dW_a + dW_c = 0.$$

L'énergie des conducteurs est

$$W_a = \frac{1}{2} \sum MV,$$

et, par suite,

$$(2) \qquad dW_a = \frac{1}{2} \sum M dV + \frac{1}{2} \sum V dM.$$

Pour l'énergie des condensateurs, dont la capacité est invariable, nous prendrons l'expression

$$W_c = \frac{1}{2} \sum CV^2,$$

d'où l'on déduit

$$dW_c = \sum CV dV.$$

Enfin, pour chaque système formé d'un conducteur et du condensateur correspondant, la charge totale $M + CV$ est constante ; on a donc

$$dM + C dV = 0,$$

et, par suite,

$$V dM + CV dV = 0;$$

ce qui donne pour l'ensemble des conducteurs et des condensateurs

$$\sum V dM + \sum CV dV = 0.$$

En tenant compte de cette dernière relation, l'équation (2) peut s'écrire

$$dW_a = \frac{1}{2} \sum M dV - \frac{1}{2} \sum CV dV = \frac{1}{2} \sum M dV - \frac{1}{2} dW_c.$$

On a donc

$$(3) \qquad 2 dW_a + dW_c = \sum M dV = - \sum \frac{M dM}{C}.$$

Cette équation est vraie, quelles que soient les capacités des condensateurs. Rien n'empêche de supposer ces capacités infiniment grandes par rapport aux charges M des conducteurs

proposés, de manière que les variations de potentiel dV_1, dV_2... et les variations d'énergie $M_1 dV_1$, $M_2 dV_2$... soient absolument négligeables. On rentre alors dans le cas de condensateurs maintenus à des potentiels constants par des sources extérieures, et l'équation (3) se réduit à

$$2dW_a + dW_c = 0,$$

ou

$$-(dW_a + dW_c) = dW_a;$$

ce qui donne finalement, d'après l'équation (1),

$$dT = dW_a.$$

Ainsi, lorsque les conducteurs sont maintenus respectivement à des potentiels constants, l'énergie du système, pour une déformation quelconque, s'accroît d'une quantité égale au travail des forces électriques. Ce travail est positif, si le système est abandonné à lui-même ; il est emprunté, ainsi que le surcroît d'énergie, aux sources qui maintiennent les potentiels constants. Les sources fournissent donc à chaque instant une quantité d'énergie qui se partage en deux parties égales : l'une sert à accomplir le travail dT des forces électriques, l'autre est employée à accroître de dW_a l'énergie électrique du système.

Dans ce cas l'énergie du système tend vers un maximum.

98. — Nous allons faire une application de ces théorèmes au problème suivant qui peut servir de base à la théorie des électromètres symétriques.

Supposons qu'un système de conducteurs soit formé de deux cylindres fixes indéfinis A et B (fig. 21) à axe commun, et d'un cylindre C concentrique aux précédents, mobile dans le sens de cet axe, la longueur du cylindre intérieur C étant d'ailleurs assez grande pour que la densité électrique à chacune de ses extrémités ne dépende que du conducteur fixe le plus voisin. Soient V_1, V_2 et V les potentiels de ces trois corps, A_0, B_0, et C_0 les charges qu'ils possèdent lorsque le cylindre mobile est dans une position symétrique par rapport aux deux autres.

Si le cylindre C se déplace d'une petite quantité x, vers la droite par exemple, la distribution de l'électricité, sur les différentes surfaces voisines de l'ouverture et aux extrémités, n'est pas modifiée; on a simplement, de ce côté, augmenté d'une quantité proportionnelle à x la surface sur laquelle la densité électrique est uniforme et proportionnelle à la différence des potentiels des conducteurs voisins. La moitié de droite du cylindre mobile aura donc gagné une quantité d'électricité proportionnelle à x, et le cylindre fixe B une quantité égale d'électricité contraire; l'effet inverse se sera produit de l'autre côté.

On aura ainsi, en appelant A, B et C les charges nouvelles des trois conducteurs après le déplacement du cylindre intérieur et α la capacité par unité de longueur du cylindre inté-

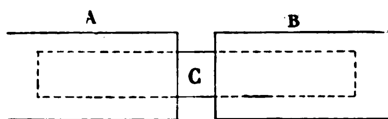


Fig. 21

rieur loin du milieu et des extrémités,

$$\begin{aligned} C &= C_0 + \alpha x(V - V_2) - \alpha x(V - V_1) = C_0 + \alpha x(V_1 - V_2), \\ B &= B_0 - \alpha x(V - V_2), \\ A &= A_0 + \alpha x(V - V_1). \end{aligned}$$

La variation d'énergie est alors

$$\begin{aligned} W - W_0 &= \frac{1}{2}\alpha x\left[(V_1 - V_2)V - (V - V_2)V_2 + (V - V_1)V_1\right] \\ &= \alpha x\left[V(V_1 - V_2) - \frac{1}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right)\right] \\ &= \alpha x(V_1 - V_2)\left[V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\right]. \end{aligned}$$

La résultante F des actions de A et B sur C est, par raison de symétrie, parallèle à l'axe commun; le travail accompli

Fx pendant le déplacement x est égal à la variation d'énergie. On en déduit

$$F = \alpha(V_1 - V_2)\left[V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\right].$$

On peut d'ailleurs exprimer le coefficient α en fonctions des données du problème. On sait, en effet (**80**), que dans le cas de deux cylindres concentriques indéfinis, dont les rayons sont R et R_1 et les potentiels V et V_1, la charge du cylindre intérieur sur une longueur x est

$$M = \frac{(V - V_1)x}{2} \frac{1}{l.\frac{R_1}{R}}.$$

Il en résulte

$$\alpha = \frac{1}{2l.\frac{R_1}{R}},$$

et, par suite,

$$F = \frac{V_1 - V_2}{2l.\frac{R_1}{R}}\left[V - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\right].$$

CHAPITRE SIXIÈME

DES DIÉLECTRIQUES

99. Rôle du milieu diélectrique. — Jusqu'ici nous avons raisonné dans l'hypothèse que les actions s'exercent à distance entre les masses électriques, et considéré le diélectrique comme un milieu inerte à travers lequel agissent les forces, mais dénué par lui-même de toute propriété active.

D'un autre côté, il paraît aujourd'hui bien démontré que la chaleur est un mouvement vibratoire dont la propagation s'effectue par l'intermédiaire d'un milieu élastique; or nous avons vu que le problème de l'équilibre électrique et celui de la propagation de la chaleur dans l'état permanent sont définis par les mêmes propriétés mathématiques.

N'est-il pas permis de supposer que dans les deux cas l'analogie est plus intime, qu'elle se poursuit jusque dans le mécanisme des actions élémentaires, et qu'il n'y a d'autre différence dans les deux ordres de phénomènes que celles que nous introduisons nous-mêmes dans l'interprétation physique des lois? S'il en est ainsi, la production des forces électriques doit pouvoir s'expliquer par la seule action du milieu.

Telle est l'idée que Faraday a cherché à mettre en lumière et qui l'a guidé constamment dans ses travaux. Il n'y a pas lieu de chercher ici à démontrer ou infirmer l'exactitude de l'un ou de l'autre de ces points de vue, mais seulement leur équivalence pour l'explication des phénomènes.

Nous commencerons par établir quelques théorèmes sur les relations des forces et des pressions électrostatiques.

100. Expression de la force par les pressions. — Nous avons déjà considéré comme évident (40) que *la force qui s'exerce sur un conducteur est la résultante des pressions électriques sur toute sa surface*, mais il peut être utile d'envisager ce théorème d'un autre point de vue.

La pression, par unité de surface, en un point d'un conducteur où la densité est σ et la force F, a pour valeur

$$p = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi}F^2 = \frac{1}{2}F\sigma,$$

et cette pression est toujours dirigée vers l'extérieur, quel que soit le signe de l'électricité.

Pour chaque élément de la surface, la pression pdS est la résultante des actions exercées, sur la masse σdS de cet élément, par toutes les masses extérieures au conducteur et par celles qui le recouvrent. Pour la surface entière, la résultante de toutes les pressions est la résultante des actions exercées sur le conducteur, tant par les masses extérieures que par son électricité propre. Mais les actions qu'exercent les unes sur les autres les diverses masses électriques du conducteur ont une résultante nulle puisque, l'équilibre existant, ces masses peuvent être considérées comme fixées sur le conducteur, et que dans ce cas les forces élémentaires s'annulent deux à deux; la résultante des pressions est donc seulement égale à la résultante des actions des masses extérieures.

101. — *Quand un système électrique est entouré par une surface de niveau* S_1, *la force exercée sur ce système est la résultante des pressions qui s'exerceraient sur une couche égale à la charge totale du système, en équilibre sur la surface* S_1.

Supposons qu'une surface de niveau S_1 partage toutes les masses agissantes en deux systèmes, l'un intérieur M_1, l'autre extérieur M_2. Nous avons vu que, pour tous les points extérieurs à S_1, on peut remplacer les masses intérieures par une couche de même masse totale M_1, en équilibre sur la surface. Inversement, le système extérieur M_2 agira sur cette couche M_1 solidifiée sur la surface S_1 comme il agi-

rait sur les masses intérieures, supposées liées entre elles de manière à former un système rigide.

Or, en vertu de la remarque précédente, l'action des masses extérieures sur la couche S_1 et, par suite, sur le système M_1 des masses intérieures, n'est autre chose que la résultante des pressions électrostatiques de cette couche.

Comme l'action totale du système M_1 sur tous les corps extérieurs est égale et de signe contraire à la force que subit ce système, on voit aussi que l'action du système M_1 sur les corps extérieurs est égale à la résultante des pressions élémentaires sur la surface S_1, chacune d'elles étant comptée vers l'intérieur.

102. — *L'action réciproque de deux systèmes* M_1 *et* M_2 *est*

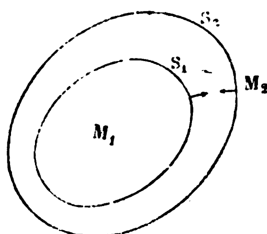


Fig. 22

égale à l'action de deux couches $+M_1$ *et* $-M_1$ *distribuées sur deux surfaces de niveau* S_1 *et* S_2 *qui comprennent* M_1 *et laissent en dehors* M_2.

Considérons, en effet, une seconde surface de niveau S_2 (fig. 22) qui comprenne M_1 et laisse encore tout entier à l'extérieur le système M_2.

Disposons sur la surface S_1 une couche $+M_1$ en équilibre, et une couche $-M_1$ en équilibre sur S_2; la couche S_1 peut remplacer le système intérieur $+M_1$ pour tous les points extérieurs à S_1 et la couche S_2 équivaut au système extérieur M_2 pour tous les points compris dans la surface S_2.

L'ensemble de ces deux couches donne d'ailleurs un potentiel constant V_1 à l'intérieur de S_1 et un potentiel constant V_2 à l'extérieur de S_2; enfin un potentiel variable de V_1 à V_2

dans l'espace intermédiaire. La force électrique est donc nulle partout, sauf dans cet espace, où elle conserve la même valeur en chaque point, soit pour les deux systèmes primitifs M_1 et M_2, soit pour les couches équivalentes distribuées sur les surfaces S_1 et S_2.

L'action de la surface électrisée S_1 sur la couche S_2 est donc la même que sur le système M_2 ; celle de S_2 la même sur S_1 que sur M_1 ; les actions réciproques des surfaces électrisées S_1 et S_2 sont donc les mêmes que celles des deux systèmes primitifs M_1 et M_2.

Mais nous savons par les théorèmes qui précèdent que les actions éprouvées par les surfaces S_1 et S_2 ne sont autre chose que les résultantes des pressions électriques $p_1 dS_1$ et $p_2 dS_2$ qui s'exercent sur les éléments de ces surfaces. Ces pressions ont pour valeurs, en désignant par F_1 et F_2 la force électrique dans le milieu, au voisinage des éléments considérés,

$$p_1 dS_1 = \frac{1}{8\pi} F_1^2 dS_1,$$

$$p_2 dS_2 = \frac{1}{8\pi} F_2^2 dS_2 ;$$

elles sont dirigées, les premières à l'extérieur de la surface S_1, les secondes à l'extérieur de la surface S_2, et les résultantes de ces deux systèmes de forces normales $p_1 dS_1$ et $p_2 dS_2$ sont égales et de signes contraires, comme étant l'action et la réaction.

103. — La force réelle qui agit entre les deux surfaces électrisées S_1 et S_2 peut être considérée comme provenant des actions élémentaires qui s'exercent directement et à distance entre les différentes masses électriques qui les recouvrent, prises deux à deux. C'est l'hypothèse qui a servi de base à tous nos calculs jusqu'à présent. Mais on peut admettre aussi que cette action se transmet par l'intermédiaire du milieu ambiant en vertu d'une élasticité spéciale, comme le croyait Faraday. Nous plaçant à ce point de vue, nous allons examiner les conditions mécaniques auxquelles doit alors satisfaire le milieu intermédiaire.

Considérons, pour cela, un canal orthogonal entre les deux surfaces S_1 et S_2. Le flux de force émané de dS_1 (fig. 23) va s'absorber en dS_2, et les deux éléments dS_1 et dS_2 sont exactement dans le même état que s'ils étaient reliés par des cordons élastiques parallèles aux lignes de force et tirant les deux éléments l'un vers l'autre avec une force égale à p_1 par unité de surface sur dS_1 et à p_2 sur dS_2.

Prenons dans le canal un élément de volume terminé par deux surfaces de niveau infiniment voisines S et S', distantes de dn, et supposons-le solidifié. Cet élément de volume doit être considéré comme soumis à deux tensions tirant extérieurement sur ses bases et dont la résultante est

$$dR = p'dS' - pdS = \frac{1}{8\pi}(F'^2 dS' - F^2 dS).$$

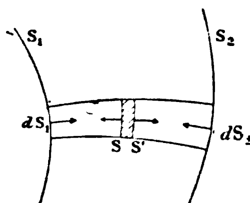


Fig. 23

Comme on a, en vertu des propriétés des tubes de force,

$$FdS = F'dS',$$

il en résulte

$$dR = \frac{1}{8\pi} FdS(F' - F).$$

Les deux surfaces étant infiniment voisines, on peut écrire

$$F' - F = \frac{dF}{dn} dn;$$

ce qui donne

$$dR = \frac{1}{8\pi} dS dn F \frac{dF}{dn} = \frac{1}{2} dS dn \frac{d}{dn}\left(\frac{F^2}{8\pi}\right) = dS dn \frac{1}{2}\frac{dp}{dn}.$$

En appelant R l'action relative à l'unité de volume du diélectrique en un point, on a

$$R = \frac{1}{2}\frac{dp}{dn}.$$

Le résultat est donc le même que si les forces s'exerçaient sur le diélectrique lui-même et que la force par unité de volume fût déterminée par un potentiel égal en chaque point à $-\frac{p}{2}$; l'élément de volume tend à être entraîné dans la direction vers laquelle la fonction p va en augmentant.

104. — Mais dans ces conditions l'élément de volume ne peut être en équilibre; il est donc nécessaire de faire intervenir d'autres forces. Pour les déterminer, il est utile de considérer le problème d'hydrostatique correspondant.

Lorsque, dans un liquide en équilibre, la pression en chaque point est représentée par une fonction p_1 des coordonnées, la résultante des pressions exercées sur une surface fermée est égale à la résultante d'un système de forces ayant un potentiel p_1 et agissant sur le volume tout entier limité par cette surface.

Il suffit, pour s'en assurer, de remarquer que sur un élément de volume dv, limité par deux surfaces d'égale pression et par des surfaces orthogonales et formant un cylindre infiniment petit de base dS et de hauteur dn, la résultante des pressions est égale à

$$-dS\frac{dp_1}{dn}dn = -dv\frac{dp_1}{dn},$$

$\frac{dp_1}{dn}$ étant la dérivée de la pression par rapport à la normale à la surface de niveau. Cette force, ou *poussée*, agit normalement à la surface de niveau et dans le sens vers lequel les pressions diminuent. Elle est d'ailleurs, en vertu de l'équilibre, égale et directement opposée à la résultante de toutes les forces extérieures sur le même volume, par exemple au poids du liquide qu'il renferme, s'il s'agit d'un liquide soumis à la seule action de la pesanteur.

Dans le problème d'électricité, la résultante des forces qui s'exercent sur un élément de volume $dS\,dn$, en vertu des tensions que nous avons considérées le long des lignes de force, est égale à $dS dn\,\frac{1}{2}\frac{dp}{dn}$ et dirigée dans le sens vers lequel la force ou la fonction p augmente.

Pour établir l'équilibre, nous admettrons en outre qu'il existe en chaque point dans le diélectrique une pression p_1.

La surface entière de l'élément de volume étant soumise à cette pression dont la résultante est dR_1, la condition d'équilibre est

$$dR + dR_1 = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{dp}{dn} - \frac{dp_1}{dn} = 0,$$

ou

$$p = 2p_1.$$

L'action réelle sur l'élément du volume $dS dn$ se compose donc d'une *pression* latérale $p_1 = \frac{1}{2}p$ et d'une *tension* sur les bases dS égale à $p - p_1$, c'est-à-dire encore $\frac{p}{2}$.

105. Tension et répulsion des lignes de force. — Si l'on considère une couche terminée par deux surfaces de niveau électrisées sur lesquelles on imagine les masses électriques capables de remplacer l'action des corps extérieurs à la couche, les deux surfaces s'attireront avec une force égale à la résultante générale des tensions. En divisant cette couche en deux par une surface orthogonale, il s'exercera entre les deux fragments une *répulsion* égale à la résultante des pressions latérales.

Il est facile d'étendre ces considérations au cas où la seconde surface de niveau n'envelopperait pas la première.

On peut donc imaginer que *les corps conducteurs sont reliés l'un à l'autre par des fils élastiques tendus suivant les lignes de force et qui se repoussent entre eux.* Cette représentation matérielle des phénomènes est un guide utile dans un grand nombre d'applications.

106. — Les propriétés qui précèdent sont la traduction mathématique de l'idée suivant laquelle Faraday se représentait l'état des diélectriques et qu'il résumait lui-même dans les deux paragraphes suivants de ses *Experimental Researches*, série XI, § 1297-1298 :

« L'action inductive qu'on peut concevoir comme s'exerçant dans la direction même des lignes de force qui relient les surfaces terminales de deux conducteurs électrisés serait accompagnée d'une action latérale ou transverse à ces mêmes lignes et qui correspondrait à la dilatation ou la répulsion à laquelle elles semblent obéir. Autrement dit, la force attractive qui s'exerce entre les particules du diélectrique dans la direction même de l'induction est accompagnée d'une force répulsive agissant dans une direction transverse.

« L'induction semble consister en un certain état de polarisation des particules déterminé par l'action du corps électrisé, état dans lequel les particules seraient positives d'un côté, négatives de l'autre, et seraient disposées régulièrement les unes par rapport aux autres, et en relation avec la surface ou les particules mêmes du corps inducteur. Cet état est un état de contrainte, qui est établi et se maintient seulement par l'action d'une force, et qui se détend et fait place à l'état naturel sitôt que la force cesse d'agir. Il n'y a d'ailleurs que dans les corps isolants que cet état peut se maintenir sous l'action d'une quantité fixe d'électricité, attendu que ce sont les seuls où les particules peuvent rester polarisées. »

107. Énergie du milieu diélectrique. — Dans cette manière de voir, toute l'énergie du système électrique doit résider dans le milieu diélectrique et il est facile d'en calculer la valeur en chaque point.

L'énergie totale d'un système est (**91**)

$$W = \frac{1}{2}\sum mV, \quad \text{ou} \quad W = \frac{1}{2}\int V\rho\, dv$$

Remplaçant la densité par sa valeur déduite de l'équation de Poisson

$$\Delta V + 4\pi\rho = 0,$$

il vient

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int V\Delta V dv.$$

Jusqu'ici l'énergie est évaluée en fonction des masses électriques elles-mêmes. Pour en modifier la signification, il suffira d'appliquer la formule de Green (**22**)

$$\int V\Delta V dv = \int V\frac{\partial V}{\partial n}dS - \int F^2 dv$$

au volume limité par une sphère de très grand rayon r comprenant le système électrisé que l'on envisage. Le premier terme du second membre doit être étendu à la surface de cette sphère. Le potentiel V, à mesure qu'on s'éloigne, tend à devenir en raison inverse de r; le facteur $\frac{\partial V}{\partial n}$ représente la composante normale de la force et devient en raison inverse de r^2. Comme la surface elle-même est proportionnelle à r^2, cette intégrale est en raison inverse de r et tend vers zéro.

Le second membre se réduit donc au deuxième terme et on a pour expression de l'énergie

$$W = \frac{1}{8\pi}\int F^2 dv.$$

D'après cela, l'énergie du système est le même que si chaque élément de volume du milieu possédait une quantité d'énergie $\frac{1}{8\pi}F^2 dv$. L'énergie w par unité de volume est alors

$$w = \frac{1}{8\pi}F^2 = p.$$

Ainsi *l'énergie par unité de volume est égale en chaque point à la pression électrostatique.*

108. Pouvoir inducteur spécifique. — Si le diélectrique joue ainsi le rôle essentiel dans les phénomènes, on doit s'attendre

à ce que tous les milieux ne se comportent pas exactement de la même manière.

On sait, en effet, depuis les expériences de Franklin, que la nature du verre a une grande importance pour la construction des batteries électriques. Cavendish avait fait beaucoup d'expériences pour déterminer directement le rôle comparatif des différents corps employés comme isolants dans les condensateurs, mais ces expériences étaient encore inédites et ignorées lorsque Faraday publia ses importants travaux.

Faraday a constaté que, si l'on fait communiquer les armatures de deux bouteilles de Leyde sphériques de mêmes dimensions, dans l'une desquelles la couche d'air isolante a été remplacée par un diélectrique solide, comme du soufre fondu ou de la résine, une quantité déterminée d'électricité portée sur ce système de conducteurs ne se partage pas en parties égales entre les deux bouteilles. Celle dont le diélectrique est solide prend une charge plus grande.

Le phénomène est général et obéit à une loi très simple. La charge que prend un condensateur fermé, à diélectrique solide ou liquide, est dans un rapport constant avec la charge qu'il prendrait, pour la même différence de potentiel, si le diélectrique était remplacé par une couche d'air.

L'expérience indique, en effet, que l'air et les gaz, même humides, se comportent sensiblement de la même manière, quelles que soient la pression et la température. Si la nature du gaz a une influence appréciable sur laquelle nous reviendrons plus loin, elle peut être négligée dans les applications.

Le rapport ainsi déterminé est ce que Faraday appelle *le pouvoir inducteur spécifique* du diélectrique. C'est, comme on voit, le nombre par lequel il faut multiplier la capacité d'un condensateur à air pour avoir celle du même condensateur dans lequel la lame d'air aura été remplacée par le diélectrique en question.

109. Absorption électrique. — La détermination de cette constante présente, pour la plupart des corps, de grandes difficultés, par suite de l'intervention d'un phénomène auquel Faraday a donné le nom d'*absorption électrique* et qui a la même cause que la charge résiduelle des condensateurs. La

capacité d'un condensateur, dans lequel le diélectrique est un corps solide, se présente comme une fonction du temps ; elle est croissante et paraît tendre vers une limite à mesure que la durée de la charge augmente. Inversement, quand on décharge le condensateur, l'électricité disponible qui disparaît dans la décharge est quelquefois loin d'atteindre la totalité de celle qu'il possède ; on sait, d'ailleurs, qu'on peut à des intervalles successifs obtenir un nombre plus ou moins grand de décharges d'intensités décroissantes.

Il paraît difficile, dans l'état actuel de la science, de rendre un compte exact de cette propriété. Tout semble indiquer qu'elle est due à un changement progressif dans la structure du diélectrique, à une déformation particulière, sous l'influence des causes qui produisent la polarisation, déformation qui devient permanente, comme dans un corps imparfaitement élastique, et à la suite de laquelle le corps ne revient pas immédiatement à son état primitif quand la cause a cessé d'agir.

Ce qui confirme cette manière de voir, c'est que toutes les circonstances qui dans les cas d'une déformation mécanique facilitent le retour d'un corps à l'état normal, comme les chocs, les variations rapides de température, etc., paraissent accélérer également la disparition de la charge résiduelle et le retour à l'état neutre.

110. Polarisation du diélectrique. — Si l'expérience de Faraday est impuissante à trancher la question des actions à distance ou au contact, elle met en évidence d'une façon indiscutable le rôle actif joué par le milieu dans les phénomènes électriques. On est ainsi conduit à admettre que, sous l'influence électrique, le milieu prend un état de polarisation analogue à celui qu'on constate dans le fer doux sous l'influence d'un aimant.

Poisson a imaginé pour expliquer le magnétisme une hypothèse qui a été transportée à l'étude des phénomènes électriques par Mossotti et adoptée ensuite par Faraday. Cette hypothèse consiste à admettre que le milieu magnétique ou diélectrique est formé de particules, sphériques par exemple, absolument conductrices, disséminées dans un milieu non conducteur.

« Qu'on se figure tout l'espace qui environne une sphère

comme constitué par un diélectrique tel que l'essence de térébenthine ou l'air, parsemé de conducteurs sphériques, comme des balles de fusil, tous isolés les uns des autres, et l'on aura, tant au point de vue de la constitution que des propriétés, l'image exacte de ce que je considère comme étant la constitution et les propriétés du diélectrique lui-même. Si on charge la sphère, tous ces petits conducteurs prendront deux pôles : si on la décharge, ils retourneront à l'état naturel pour se polariser de nouveau toutes les fois qu'on viendra à la recharger. » (Faraday, *Experimental Researches*, série XIV, § 1679.)

Sir W. Thomson a montré que, sans faire aucune hypothèse sur la constitution du milieu, il suffit d'admettre, ce qu'on peut considérer comme un fait expérimental, que chaque élément de volume est transformé par l'induction en un petit aimant ; on retrouve ainsi toutes les conséquences mathématiques de l'hypothèse de Poisson.

111. Définition du diélectrique. — Un diélectrique placé dans un champ se polarise et la somme algébrique des masses qui constituent la charge est toujours nulle. Nous savons d'ailleurs (**50**) que, quel que soit l'état d'un corps électrisé, l'action qu'il exerce sur un point extérieur est égale à celle d'une couche de même masse totale que la sienne distribuée sur la surface suivant une certaine loi : dans le cas actuel, la couche équivalente est donc formée de deux nappes ayant des masses égales et de signes contraires.

D'après la théorie de l'induction magnétique, que nous développerons plus loin, l'action de cette couche remplace non seulement pour les points extérieurs, mais pour les points intérieurs, l'effet de la polarisation ; la distribution est déterminée par la condition qu'en deux points voisins, l'un dans le diélectrique, l'autre à l'extérieur, les composantes de la force normales à la surface de séparation soient dans un rapport constant μ, de telle sorte qu'on ait, en désignant par F'_n et F_n les composantes normales à l'intérieur du diélectrique et à l'extérieur, comptées dans la même direction,

$$(1) \qquad \frac{F_n}{F'_n} = \mu, \quad \text{ou} \quad F_n = \mu F'_n.$$

Sans chercher à approfondir, pour le moment, la nature intime du phénomène, on peut considérer cette équation (1) comme définissant le rôle d'une certaine classe de corps, à laquelle l'expérience montre que doivent appartenir les diélectriques tels que nous les connaissons.

Nous avons vu (**39**) que, de part et d'autre d'une surface électrisée, les composantes des forces parallèles à la surface sont égales et que la différence des composantes normales est proportionnelle à la densité de la couche,

$$F'_n - F_n = 4\pi\sigma.$$

On en déduit

$$-\sigma = \frac{1}{4\pi}(F_n - F'_n) = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\frac{F_n}{4\pi}.$$

L'hypothèse de Poisson revient donc, en définitive, à supposer

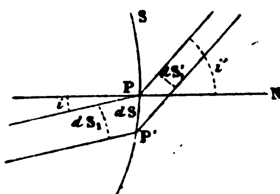


Fig. 24

à la surface du diélectrique une couche *fictive* dont la densité σ satisfasse à cette condition.

112. — Ce résultat peut être présenté sous une autre forme. De part et d'autre d'un élément PP' ou dS de la surface du diélectrique (fig. 24) traçons deux tubes de force et terminons-les par deux bases orthogonales dS_1 et dS'_1 situées, l'une dans l'air, l'autre dans le diélectrique, et seulement assez éloignées pour comprendre entre elles la couche σdS. Le flux de force qui entre par la base dS_1 est $F dS_1 = F_n dS$; celui qui sort par la base dS'_1 est $F' dS'_1 = F'_n dS$; la variation du flux est donc égale à $(F_n - F'_n) dS$, ou, en vertu de l'équation (1) qui définit le diélectrique, à $\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) F_n dS$; elle correspond à une masse élec-

trique σdS telle que l'on ait

$$\left(1-\frac{1}{\mu}\right)F_n=-4\pi\sigma.$$

Les choses se passent donc comme si une fraction constante du flux de force était absorbée par la couche fictive de la surface; cette fraction a pour valeur $1-\frac{1}{\mu}$.

113. Réfraction du flux. — Les composantes tangentielles restant égales dans les deux milieux, si on appelle i et i' les angles des forces F et F' avec la normale N à la surface S, les relations

$$F\cos i=\mu F'\cos i',$$
$$F\sin i=F'\sin i',$$

donnent l'équation

$$\operatorname{tang} i=\frac{1}{\mu}\operatorname{tang} i',$$

qui exprime ce qu'on peut appeler la loi de réfraction de la force ou du flux au moment où la force passe de l'air dans un diélectrique liquide ou solide.

114. — D'une manière plus générale, supposons que la surface S sépare deux diélectriques, solides ou liquides, dont les pouvoirs inducteurs spécifiques soient égaux respectivement à μ_1 et μ_2, le rapport des composantes normales $(F_n)_1$ et $(F_n)_2$, de part et d'autre de la surface, est égal au rapport inverse des pouvoirs inducteurs, ce qui donne

$$\frac{(F_n)_1}{(F_n)_2}=\frac{\mu_2}{\mu_1},$$

ou

(2) $$\mu_1(F_n)_1=\mu_2(F_n)_2.$$

La couche fictive est déterminée par l'équation

$$(F_n)_2-(F_n)_1=4\pi\sigma,$$

et la loi de la réfraction donne pour les angles i_1 et i_2 des forces avec la normale, de part et d'autre de la surface, la relation

$$\frac{\tang i_1}{\mu_1} = \frac{\tang i_2}{\mu_2}.$$

115. Tubes et flux d'induction. — Convenons d'appeler *induction en un point, le produit de la force* F *par le pouvoir inducteur spécifique* μ de la substance au point considéré, et *quantité ou flux d'induction* au travers d'un élément de surface, le produit de cet élément par la composante normale de l'induction ; les résultats qui précèdent pourront alors s'exprimer d'une manière très simple.

Remarquons d'abord que dans les milieux gazeux ou, au moins, dans le vide $\mu = 1$; l'induction et la force ont la même expression numérique et il y a identité entre les tubes de force et les tubes d'induction, de même qu'entre les deux espèces de flux.

Dans le cas de milieux contigus de pouvoirs inducteurs spécifiques μ_1 et μ_2, la relation des composantes normales

$$\mu_1 F_1 \cos i_1 = \mu_2 F_2 \cos i_2$$

donne

$$\mu_1 F_1 dS \cos i_1 = \mu_2 F_2 dS \cos i_2,$$

équation qui signifie que le flux d'induction qui traverse l'élément dS conserve la même valeur dans les deux milieux. Nous sommes donc conduits à la loi suivante :

Dans un tube d'induction, le flux d'induction garde une valeur constante, quels que soient les milieux diélectriques qu'il traverse, tant qu'il ne rencontre pas de corps réellement électrisé. Cette loi se confond avec celle de la *conservation du flux de force* quand on ne considère qu'un seul milieu.

Si le tube rencontre une masse m d'électricité, située dans le milieu diélectrique, on peut toujours concevoir cette masse comme séparée du diélectrique par une couche d'air ; dans cette couche, le flux d'induction se confond avec le flux de

force ; celui-ci variant de $4\pi m$, il en est de même du flux d'induction en vertu du théorème qui précède.

116. Équations caractéristiques de l'induction. — Si l'on applique ce théorème à un élément de volume $dxdydz$ situé dans un diélectrique dont le pouvoir spécifique est μ, en un point où la densité réelle d'électrisation est ρ, on obtient l'équation suivante, analogue à celle de Poisson :

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial V}{\partial z}\right)+4\pi\rho=0.$$

Comme nous ne considérons pour le moment que les milieux isotropes, le facteur μ est constant et cette équation se réduit à

$$\mu\Delta V+4\pi\rho=0.$$

A la surface de séparation des deux milieux, il y aura lieu de distinguer deux densités : la densité σ de la couche fictive qu'il faut supposer à la surface de séparation des diélectriques pour avoir, vis-à-vis de tout point situé en dehors de cette surface, l'effet équivalent de leur polarisation intérieure ; et la densité σ' de la couche réelle qu'on aurait pu développer par le frottement, par exemple, sur cette même surface.

On aura alors pour la surface de séparation des deux milieux les équations

$$(F_n)_2-(F_n)_1=4\pi(\sigma+\sigma'),$$
$$\mu_2(F_n)_2-\mu_1(F_n)_1=4\pi\sigma'.$$

En convenant de compter dans chaque milieu les normales à partir de la surface et désignant par V_1 et V_2 les valeurs respectives du potentiel dans les deux diélectriques, ces équations peuvent s'écrire

$$(4)\qquad \frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\frac{\partial V_2}{\partial n_2}+4\pi(\sigma+\sigma')=0,$$

$$(5)\qquad \mu_1\frac{\partial V_1}{\partial n_1}+\mu_2\frac{\partial V_2}{\partial n_2}+4\pi\sigma'=0.$$

Le pouvoir inducteur μ est toujours positif et supérieur à l'unité; il peut être considéré comme égal à l'infini dans les conducteurs.

117. — Dans le cas où les diélectriques n'ont reçu d'électricité ni à l'intérieur ni à la surface, ces équations se réduisent à

$$\Delta V = 0,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \frac{\partial V_2}{\partial n_2} + 4\pi\sigma = 0,$$

$$\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = 0.$$

On en déduit

$$\sigma = \frac{\mu_2 - \mu_2}{4\pi\mu_1} \frac{\partial V_1}{\partial n_1}.$$

118. Remarques sur la couche fictive. — Bien que la couche de densité σ soit une couche fictive, il faut remarquer que si, pendant que le diélectrique est soumis à l'induction, on ramenait sa surface à l'état neutre, par un procédé quelconque, au moyen d'une flamme reliée au sol par exemple, et qu'on enlevât ensuite les masses inductrices, on trouverait sur cette surface une couche réelle de densité $-\sigma$.

Cette remarque permet d'expliquer les phénomènes que présentent certains corps, par exemple les cristaux pyroélectriques à un axe, tels que la tourmaline. Il suffit de supposer que l'état normal de ces corps est analogue à celui que prennent les diélectriques sous l'influence des forces électriques, autrement dit, qu'ils sont *naturellement polarisés* et que *leur état de polarisation est une fonction de la température*.

Une tourmaline neutre en apparence est une tourmaline qui, en vertu de sa polarisation, produirait à l'extérieur les mêmes forces qu'une couche de masse totale nulle et de densité $+\sigma$ distribuée sur la surface, mais qui, par suite de causes quelconques, par exemple la déperdition au contact du milieu ambiant, s'est recouverte d'une couche réelle de densité $-\sigma$, laquelle annule pour tout point extérieur l'effet de la polarisation intérieure. Si on vient à faire varier la température de la tourmaline, on change l'état intérieur sans modifier la couche

développée sur la surface : l'équilibre est rompu, et ne pourra se rétablir que d'une façon plus ou moins lente sous l'action des causes qui avaient amené la neutralisation antérieure; l'effet observé, dans ces conditions, est la différence des actions de la couche fictive et de la couche réelle.

119. Charges de deux éléments correspondants. — Le théorème des éléments correspondants (**36**) est encore vrai quand les deux conducteurs sont situés dans des milieux différents. Il suffit, pour le voir, de remarquer que l'on peut toujours supposer le conducteur séparé du diélectrique par une couche d'air infiniment mince, comprise entre la surface du conducteur lui-même et une surface de niveau infiniment voisine.

Soient A et B les deux conducteurs, μ_1 et μ_2 les pouvoirs inducteurs des diélectriques avec lesquels ils sont respectivement en contact. Si la surface de séparation S des deux diélectriques n'a pas de couche électrique réelle, le flux d'induction est le même dans toute l'étendue d'un canal orthogonal qui découpe sur les conducteurs et sur cette surface les éléments dS_a, dS_b et dS.

La force, qui serait F_a dans l'air auprès du premier conducteur, devient dans le diélectrique $F_1 = \frac{F_a}{\mu_1}$.

La densité apparente σ'_a sur le conducteur, c'est-à-dire celle qui donnerait la force F_1 par la relation ordinaire $4\pi\sigma'_a = F_1$, est égale à l'excès de la densité réelle σ_a du conducteur sur la densité fictive σ_1 à la surface du diélectrique, on en déduit

$$\sigma'_a = \sigma_a - \sigma_1 = \frac{\sigma_a}{\mu_1},$$

$$\sigma_1 = \sigma_a\left(1 - \frac{1}{\mu_1}\right).$$

On a de même, au contact du conducteur B,

$$\sigma'_b = \sigma_b - \sigma_2 = \frac{\sigma_b}{\mu_2},$$

$$\sigma_2 = \sigma_b\left(1 - \frac{1}{\mu_2}\right).$$

Si la surface S possède une couche réelle de densite σ', la couche fictive ayant une densité σ, les forces normales de part et d'autre satisfont à l'équation

$$(F_n)_2 - (F_n)_1 = 4\pi(\sigma + \sigma').$$

On a d'ailleurs, dans les deux milieux respectifs,

$$F_1 dS_a = (F_n)_1 dS,$$
$$F_2 dS_b = (F_n)_2 dS.$$

On en déduit, en remplaçant les forces F_1 et F_2 par leurs valeurs $4\pi\sigma'_a$ et $4\pi\sigma'_b$,

$$\sigma'_b dS_b - \sigma'_a dS_a = (\sigma + \sigma') dS.$$

Cette équation exprime que *la différence des charges apparentes des éléments correspondants des deux conducteurs est égale à la charge totale de l'élément correspondant de la surface de séparation des deux diélectriques.*

120. Énergie d'un système dans les cas diélectriques quelconques. — L'expression générale de l'énergie est, comme nous l'avons vu (**107**),

$$W = \frac{1}{2}\sum mV = \frac{1}{2}\int V\rho dv.$$

L'équation

$$\mu\Delta V + 4\pi\rho = 0$$

donne

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int \mu V \Delta V dv.$$

En vertu de la formule de Green et de la remarque déjà faite (**107**), cette expression se réduit à

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mu F^2 dv.$$

On a donc, pour l'énergie de l'unité de volume,

$$w = \frac{1}{8\pi}\mu F^2.$$

121. Comparaison avec les phénomènes calorifiques. — Reprenons la comparaison du problème d'équilibre électrique avec celui de la propagation de la chaleur. Nous avons vu (70) qu'entre deux mêmes surfaces de niveau, si le coefficient de conductibilité est égal à l'unité, le flux de chaleur, dans le premier, est égal numériquement au flux de force dans le second; si le coefficient de conductibilité est k, le flux de chaleur est k fois plus grand que le flux de force électrique.

Considérons maintenant deux systèmes corrélatifs, l'un électrique, l'autre calorifique, formés chacun de deux milieux séparés par une même surface S, et tels que les surfaces équipotentielles de l'un coïncident avec les surfaces isothermes de l'autre. Si k_1 et k_2 sont les coefficients de conductibilité des deux milieux, le flux de chaleur à travers un élément dS de la surface de séparation est, dans le premier milieu,

$$k_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} dS,$$

et, dans le second,

$$-k_2 \frac{\partial V_2}{\partial n_2} dS.$$

Comme l'équilibre thermique est supposé atteint, ces deux flux sont égaux et l'on a

$$k_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = 0.$$

Le système électrique donne, de même,

$$\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial n_2} = 0.$$

On en conclut

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Les flux d'induction sont donc proportionnels aux flux de chaleur, le pouvoir inducteur spécifique jouant dans le problème électrique le même rôle que le coefficient de conductibilité dans le problème calorifique.

122. Variation du potentiel produite par l'interposition d'un diélectrique. — Si l'on introduit (**96**) un corps conducteur dans un champ électrique dû à des conducteurs isolés et électrisés, la présence de ce corps nouveau a pour effet de diminuer le potentiel primitif sur chacun des conducteurs. L'introduction d'un diélectrique solide ou liquide produit à un degré moindre le même effet.

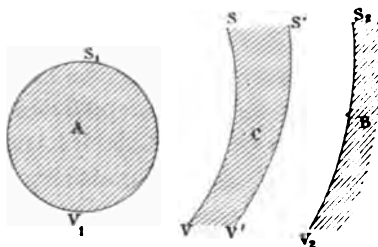


Fig. 25

Considérons, comme exemple, un cas particulier, celui d'un conducteur A (fig. 25), chargé d'une quantité M_1 d'électricité, et situé à l'intérieur d'un conducteur fermé B maintenu à un potentiel constant V_2.

L'équilibre étant établi, fixons les masses électriques sur A et B et introduisons dans l'intervalle une couche diélectrique C, de pouvoir inducteur μ, dont les surfaces interne et externe S et S' soient des surfaces de niveau du système primitif, où les potentiels étaient respectivement V et V'. Il est facile de voir que l'équilibre n'est pas troublé quand on distribue sur les surfaces S et S' des charges électriques $-M$ et $+M$ identiques à celles qui se seraient produites si ce milieu était

conducteur et que la charge primitive de A eût été remplacée par M.

En effet, les charges $+M$ sur A, $-M$ et $+M$ sur C, et $-M$ sur B établissent des potentiels constants sur les corps A, B et C; d'autre part, les couches égales et contraires $+M_1$ et $-M_1$ donnent des potentiels constants sur les conducteurs A et B, de sorte que ceux-ci sont en équilibre. La forme des surfaces de niveau intermédiaires aux conducteurs A et B n'est pas modifiée et la force est restée partout dans la même direction.

Depuis la surface S_2 jusqu'à la surface S' l'accroissement de potentiel est le même que si la couche C n'existait pas; la variation est également restée la même de S en S_1.

Pour établir la condition relative au diélectrique, considérons un canal orthogonal qui découpe sur les surfaces S_1 et S les éléments dS_1 et dS sur lesquels les densités sont en valeur absolues σ_1 et σ. Le flux de force $4\pi\sigma_1 dS_1$ qui émane de l'élément dS_1 est en partie absorbé sur l'élément dS, et la fraction perdue est

$$\frac{4\pi\sigma dS}{4\pi\sigma_1 dS_1}.$$

Cette fraction devant être égale à $1 - \frac{1}{\mu}$ (**112**), il en résulte que le rapport des charges σdS et $\sigma_1 dS_1$ de deux éléments correspondants est aussi $1 - \frac{1}{\mu}$. La condition d'équilibre du diélectrique est donc satisfaite si l'on a

$$\frac{M}{M_1} = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

La force étant devenue μ fois plus faible entre les surfaces S et S', la chute du potentiel a diminué dans le même rapport, de sorte que l'accroissement total du potentiel quand on va de B en A est maintenant

$$V' - V_2 + \frac{1}{\mu}(V - V') + V_1 - V = V_1 - V_2 - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)(V - V').$$

En désignant par U_1 le nouveau potentiel du conducteur A, on a donc

$$U_1 - V_2 = V_1 - V_2 - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)(V - V').$$

Si le corps interposé était conducteur, la perte de potentiel du conducteur A serait $V - V'$. L'introduction du diélectrique a donc aussi fait baisser le potentiel sur le conducteur A et la chute est une fraction égale à $1 - \frac{1}{\mu}$ de celle qui serait produite par un conducteur de mêmes dimensions que le diélectrique. Toutefois ce résultat simple est particulier aux conditions qui ont été choisies ; il n'en serait pas de même si le diélectrique n'était pas terminé par des surfaces de niveau du système primitif.

123. — Lorsque le diélectrique occupe tout l'espace compris entre les conducteurs A et B, de manière à constituer un condensateur fermé, on a alors $V = V_1$, $V' = V_2$, et il vient

$$U_1 - V_2 = \frac{1}{\mu}(V_1 - V_2).$$

Pour une même charge, la différence de potentiel est devenue μ fois plus faible par la substitution, à la couche d'air, d'un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique égal à μ. En d'autres termes, la capacité du système est devenue μ fois plus grande. C'est précisément l'expérience de Faraday.

La remarque faite plus haut (**119**) donne immédiatement ce dernier résultat. L'interposition d'un diélectrique de pouvoir inducteur spécifique μ, dans tout l'espace qui sépare les deux conducteurs A et B, ne modifie pas la forme des surfaces de niveau, mais la densité apparente en chaque point devient μ fois plus petite que la densité réelle ; les choses se passent donc comme si le système, gardant sa capacité primitive, avait reçu une charge μ fois plus petite.

124. — On peut encore dans le cas qui précède se représenter les phénomènes autrement.

Imaginons que le diélectrique compris entre les conduc-

teurs A et B (fig. 26) soit divisé en un nombre impair de feuillets infiniment minces α, β, α', β'.... par des surfaces de niveau du système primitif, telles que la variation de potentiel soit respectivement la même dans toutes les couches α, α'... ainsi que dans les couches β, β'.... et qu'on ait, par suite,

$$(6)\qquad \begin{aligned} V_1 - V' &= V'' - V''' = \ldots\ldots = H_\alpha, \\ V' - V'' &= V''' - V^{\text{IV}} = \ldots\ldots = H_\beta. \end{aligned}$$

Enfin, mettons sur chacune de ces surfaces des masses égales en valeur absolue à celles qui existent sur les surfaces S_1 et S_2 des conducteurs, alternativement positives et négatives, + M sur les surfaces d'ordre pair et — M sur les surfaces d'ordre

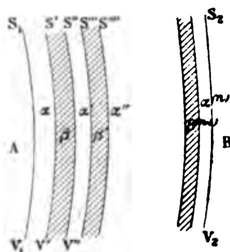


Fig. 26

impair, chacune de ces couches étant en équilibre sous l'action des conducteurs primitifs A et B.

Il est évident que le système ainsi obtenu est en équilibre. La force n'est pas modifiée dans tous les feuillets d'ordre impair, α, α', α''.., mais elle est nulle dans tous les feuillets d'ordre pair β', β', β''... et le potentiel a dans chacun de ces feuillets une valeur constante. C'est comme si tous les feuillets d'ordre pair étaient remplacés par des couches conductrices.

Cette opération a diminué la différence de potentiel entre A et B. En effet, de la surface S_1 à S'' la différence de potentiel, qui était primitivement $V_1 - V''$, est devenue $V_1 - V'$, et l'on a

$$V_1 - V' = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(V_1 - V'').$$

De même entre S' et S^{IV} la différence primitive de potentiel $V - V^{IV}$ est réduite à

$$V'-V'''=\frac{\alpha'}{\alpha'+\beta'}(V''-V^{IV}).$$

Les rapports

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\quad \frac{\alpha'}{\alpha'+\beta'},\ldots,$$

sont les mêmes dans toute l'épaisseur du diélectrique, et l'on peut écrire

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha'}{\alpha'+\beta'}\cdots\cdots=\frac{1}{\mu}.$$

En faisant ainsi le calcul de proche en proche, on voit que depuis la surface S_1 jusqu'à la surface S_2, le potentiel varie μ fois moins vite que dans l'état primitif, de sorte que la différence de potentiel de deux surfaces S_1 et S_2 est devenue, par l'interposition du diélectrique,

$$U_1-U_2=\frac{1}{\mu}(V_1-V_2),$$

ce qui donne le même résultat que précédemment.

Dans cet ordre d'idées, le coefficient μ prend une signification physique ; c'est le rapport $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ de la somme des épaisseurs de deux feuillets successifs à l'épaisseur de celui des deux qui est d'ordre impair. Or, l'expérience indique que plusieurs diélectriques solides ont un pouvoir inducteur spécifique voisin de 2, d'où il résulterait que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ des épaisseurs de deux feuillets successifs serait sensiblement égal à l'unité.

125. — L'expérience indique aussi, et les recherches de Gaugain à ce sujet sont particulièrement intéressantes, que le pouvoir inducteur spécifique varie avec le temps. Il a d'abord une valeur minimum au moment de la charge, puis augmente rapidement et ensuite d'une manière lente, pour

tendre vers une limite. En d'autres termes, le potentiel de l'armature intérieure d'un conducteur diminue d'abord rapidement aussitôt après la charge, puis plus lentement.

La force étant nulle dans chacun des feuillets β, β'..., on voit, en effet, que les couches positives sont toutes poussées vers l'extérieur, les autres vers l'intérieur, et que, par suite de leur action mutuelle, les couches qui limitent les feuillets α tendent à se rapprocher, ce qui augmente de plus en plus le pouvoir inducteur.

En généralisant ce raisonnement, on est encore conduit à attribuer aux conducteurs un pouvoir inducteur spécifique infiniment grand.

126. Théorie du déplacement de Maxwell. — Pour expliquer les propriétés des diélectriques et rendre compte des phénomènes par la seule intervention du milieu, Maxwell imagine que, quand un diélectrique est soumis à l'induction, il se produit un phénomène équivalent à un *déplacement* ou à un *glissement* d'électricité dans le sens de l'induction. Par exemple, dans une bouteille de Leyde dont l'armature intérieure est chargée positivement, le déplacement a lieu dans la masse du verre de l'intérieur vers l'extérieur.

Toute augmentation de la charge augmente le déplacement et correspond à un courant d'électricité positive de l'intérieur vers l'extérieur; toute diminution, à un courant allant de l'extérieur vers l'intérieur; la durée du courant est égale à celle de la variation.

Le déplacement par une surface est la quantité d'électricité qui la traverse. Soit σdS cette quantité pour un élément dS de la surface d'un conducteur, le déplacement est égal à $\frac{F dS}{4\pi}$, il est donc égal au flux de force correspondant divisé par 4π. Au contact d'un diélectrique la quantité d'électricité a pour valeur $\frac{\mu F dS}{4\pi}$, le déplacement est alors égal au quotient du flux d'induction par 4π.

D'une manière générale, *le déplacement en un point quelconque d'un diélectrique est égal au quotient de l'induction par 4π et parallèle à cette force.*

Un corps conducteur n'oppose aucun obstacle au déplacement. Dans un diélectrique, le déplacement est limité par l'action de forces antagonistes que développe le déplacement lui-même, en autres termes, par une espèce d'élasticité, qu'on peut appeler l'*élasticité électrique* du milieu. L'équilibre est établi quand la réaction élastique est égale en chaque point à la force électrique. Si, par analogie, on appelle *coefficient d'élasticité électrique* le rapport de la force au déplacement qu'elle produit, et qu'on suppose le milieu parfaitement élastique, on voit que le coefficient d'élasticité est égal à $\frac{4\pi}{\mu}$ et que, par suite, le pouvoir inducteur spécifique est inversement proportionnel au coefficient d'élasticité du milieu.

C'est le déplacement produit par l'induction à travers la masse entière du diélectrique qui détermine la polarisation du milieu et l'électrisation apparente des conducteurs.

Considérons un tube d'induction entre deux conducteurs. Dans toute l'étendue du tube, le déplacement est constant : chaque section orthogonale est traversée par la même quantité d'électricité. A l'une des extrémités, le déplacement s'est fait du conducteur vers le diélectrique, l'élément correspondant dS du conducteur est dit alors chargé d'électricité positive avec une densité σ; à l'autre extrémité, le déplacement s'est fait du diélectrique vers le conducteur, l'élément correspondant dS' est chargé avec une densité $-\sigma'$. Dans toute l'étendue du tube, si le diélectrique reste le même, il n'y a pas d'électricité apparente; mais ce milieu est polarisé, car si on isole par la pensée une portion du tube comprise entre deux sections orthogonales, le déplacement s'est fait en sens inverse pour ces deux sections, et toutes deux paraîtraient électrisées en sens contraires, si leur électrisation n'était neutralisée par l'électrisation égale et opposée des portions du tube en contact. Si le tube traverse la surface de séparation des deux diélectriques, le déplacement est le même dans les deux milieux, mais la polarisation n'est pas la même et la surface aura une électrisation apparente égale à la différence des couches électriques des surfaces des deux milieux en contact.

Il est évident que, puisque l'électrisation du conducteur n'est

qu'apparente, toute l'énergie due à l'électrisation doit résider dans le milieu. Elle est égale au travail dépensé pour opérer le déplacement en sens contraire des forces élastiques. D'après ce que nous avons vu (120), ce travail par unité de volume a pour valeur $\frac{\mu F^2}{8\pi}$ ou $\frac{1}{2}.\frac{\mu F}{4\pi}.F$; il est donc égal à la moitié du produit de la force électrique par le déplacement.

La théorie du déplacement de Maxwell rend donc un compte satisfaisant des propriétés du milieu.

Elle fournit une interprétation physique du pouvoir inducteur spécifique de Faraday : le pouvoir inducteur spécifique est, à un facteur près, $\frac{1}{4\pi}$, l'inverse de coefficient d'élasticité électrique du milieu.

Elle donne l'explication de cette vue de Faraday qu'il n'est pas possible de communiquer à la matière une charge absolue d'électricité : en effet, dans cette théorie, l'électricité se comporte comme un fluide incompressible; la quantité qui peut être contenue dans une surface fermée est invariable, et la production de deux quantités d'électricité égales et de signes contraires apparaît comme la conséquence d'un seul et même phénomène.

Enfin il est naturel de penser que, si l'explication des phénomènes électriques entraîne l'existence d'un milieu incompressible, répandu dans tout l'espace, ce milieu ne saurait être différent de l'éther auquel on attribue les phénomènes lumineux et calorifiques; cette théorie permet donc d'entrevoir entre les deux ordres de phénomènes une dépendance dont la confirmation serait une des conquêtes les plus importantes de la physique.

CHAPITRE SEPTIÈME

CAS PARTICULIERS D'ÉQUILIBRE

127. Représentation du champ électrique. — L'état d'un champ électrique est défini en chaque point par la direction et la grandeur de la force. On peut le représenter soit par les *surfaces de niveau*, soit par les *lignes de force*.

Dans le premier cas, on tracera les surfaces de niveau correspondant aux valeurs numériques du potentiel 1, 2, 3.... n, telles, par conséquent, que le transport d'une unité d'électricité d'une surface quelconque à la suivante corresponde à une unité de travail.

En chaque point, la force est normale à la surface de niveau; sa valeur moyenne F_1 entre deux surfaces consécutives d'ordres n et $n+1$, distantes de a, est donnée par l'équation

$$F_1 a = V_n - V_{n+1} = 1.$$

La valeur de la force moyenne est donc en raison inverse de a.

On peut tracer ces surfaces par un procédé graphique.

Prenons d'abord le cas d'un centre unique de force, un point chargé d'une masse m. Le potentiel à la distance r est

$$V = \frac{m}{r};$$

l'équation

$$r = \frac{m}{V}$$

détermine le rayon de la sphère pour laquelle le potentiel est V. Donnons à V les valeurs 1, 2, 3... n, et traçons les sphères correspondantes, nous aurons les surfaces de niveau dont les potentiels correspondent à la suite naturelle des nombres.

128. — Supposons maintenant plusieurs centres de masses m, m', m''..... agissant simultanément; le potentiel résultant en un point étant la somme des potentiels relatifs à chacun des centres, il est évident que les points de potentiel V_p s'obtiendront par les rencontres des sphères de potentiels

$$V_n, V_{n'}, V_{n''} \ldots\ldots,$$

tels que

$$n + n' + n'' \ldots\ldots = p,$$

et que le lieu géométrique de tous ces points sera la surface de niveau de potentiel V_p.

Ce procédé est général et permet, au moins en théorie, de déterminer les surfaces de niveau d'un système quelconque.

Quant à leur représentation dans un plan, elle ne pourra se faire d'une manière complète que dans le cas d'un système de révolution, à l'aide d'une figure tracée sur un plan méridien. La force sera toujours contenue dans le plan de la figure, normale en chaque point à la section méridienne des surfaces de niveau et en raison inverse de leur distance.

Si le système est symétrique par rapport à un plan, on pourra encore avoir une représentation complète de l'état du champ dans le plan de symétrie. Dans tout autre cas, une section par un plan quelconque du système des surfaces de niveau donnera encore une série de courbes qui sont naturellement des courbes de niveau; la composante de la force suivant le plan de section est normale à ces courbes en chaque point et en raison inverse de leur distance; mais la valeur de la force réelle ne se trouve pas représentée.

129. — Les lignes de force peuvent donner pour le champ une représentation équivalente. Une pareille ligne, normale en chaque point à la surface de niveau, indique déjà la direction de la force; pour représenter en même temps l'intensité, nous conviendrons de partager le champ en tubes de force

tels que le flux correspondant à chacun d'eux ait une valeur constante, égale par exemple à l'unité.

Il suffira, étant donnée une surface de niveau, de la partager en éléments dS tels que $FdS = 1$, et de prendre chacun de ces éléments comme base d'un canal orthogonal.

La division est arbitraire, et on choisira dans chaque cas celle qui conduira aux constructions les plus simples.

130. Champ uniforme. — Dans le cas d'un *champ uniforme*, toutes les surfaces de niveau sont des plans équidistants perpendiculaires à la direction de la force. La division la plus simple consiste à mener deux séries de plans rectangulaires

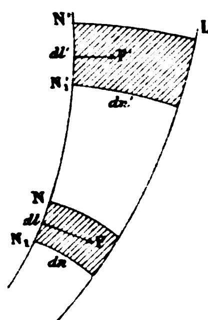


Fig. 27

entre eux et parallèles à la direction de la force. Les surfaces de niveau seront découpées en rectangles égaux.

Toute section par un plan P parallèle à la direction du champ donnera deux systèmes de lignes de force équidistantes, qui seront les intersections du plan de figure avec les deux séries de plans normaux aux surfaces de niveau.

131. Champ symétrique par rapport à un plan. — Pour tous les points du plan de symétrie, la force est parallèle au plan ; on pourra tracer les lignes de force de telle façon que le produit de la force par la distance dl (fig. 27) de deux lignes consécutives soit constant

$$F dl = F' dl';$$

comme on a

$$F dn = F' dn',$$

il en résulte

$$\frac{dl}{dn} = \frac{dl'}{dn'}.$$

Les rectangles curvilignes $dndl$, $dn'dl'$, formés par deux surfaces de niveau infiniment voisines L et L' et deux lignes de forces, sont *semblables*.

Les flux de force ne seront déterminés que si on tient compte de la dimension du tube perpendiculaire au plan de symétrie. Si on suppose que cette dimension soit partout la même, les flux ne seront pas égaux, excepté dans le cas où tous les plans parallèles au plan de la figure seraient identiques. Ce cas est celui d'une distribution cylindrique, tous les corps du système étant des cylindres parallèles ; il correspond, dans la théorie de la chaleur, au problème de la *propagation dans un plan*. Le potentiel ou la température ne dépendent plus que de deux coordonnées x et y et l'équation de Poisson se réduit à

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 4\pi\sigma = 0,$$

σ étant la densité électrique sur le plan.

Nous allons examiner avec quelques détails ce cas particulier, moins pour son importance propre que comme transition utile à des problèmes plus compliqués.

122. Systèmes cylindriques. — Considérons une ligne indéfinie, électrisée uniformément, de densité λ, c'est-à-dire dont la charge soit égale à λ par unité de longueur. En chaque point du diélectrique la force passe par l'axe et lui est normale.

Le flux de force qui émane de l'unité de longueur est égal à $4\pi\lambda$; à la distance r, ce flux traverse la surface latérale $2\pi r$ du cylindre de niveau correspondant, et la force F est donnée par la condition

$$2\pi r F = 4\pi\lambda,$$

ou

$$F = \frac{2\lambda}{r}. \tag{1}$$

La force est donc en raison inverse de la distance, comme on l'a vu déjà (80) pour les condensateurs cylindriques. L'équation

$$F = -\frac{dV}{dr} = \frac{2\lambda}{r},$$

donne pour les surfaces de niveau

$$(2) \qquad V = -2\lambda l.r + C^{te},$$

c'est-à-dire une série de surfaces cylindriques concentriques. Menons deux plans perpendiculaires à l'axe et distants de ε;

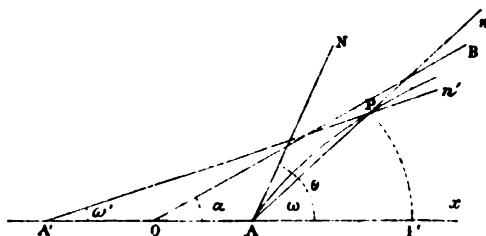


Fig. 28

la masse qu'ils comprennent est $m = \lambda\varepsilon$. Le flux de force qui passera entre ces deux plans sera donc $4\pi m$, et il est évident que, si nous menons par l'axe $4\pi m$ plans faisant entre eux des angles égaux, chacun des $4\pi m$ dièdres ainsi déterminés constitue un tube orthogonal où le flux de force est égal à l'unité.

Prenons pour plan de la figure un plan normal à l'axe. Soit A (fig. 28) la trace de la ligne électrisée, et Ax un axe quelconque à partir duquel nous numéroterons 1, 2, 3..., les traces des $4\pi m$ plans menés par l'axe. Soit enfin θ l'angle que fait avec Ax la droite de numéro N, il est évident que le flux de force correspondant à l'angle θ est

$$Q = 4\pi m \frac{\theta}{2\pi} = 2m\theta.$$

D'autre part, ce flux vaut N unités ; on a donc

$$(3) \qquad Q = 2m\theta = N, \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{N}{2m}.$$

133. Deux lignes parallèles. — Supposons que le système électrique soit composé de deux lignes parallèles A et A′, de densités λ et λ', telles que $m = \varepsilon\lambda$, $m' = \varepsilon\lambda'$; prenons pour axe des x la droite qui joint les deux traces A et A′ (fig. 28).

Par ces deux points menons deux droites An et $A'n'$, d'ordres respectivement n et n' par rapport aux centres A et A′, et faisant avec l'axe des angles ω et ω' ; joignons leur point d'intersection P à l'axe par une courbe quelconque PP′. Il est évident qu'à travers la surface cylindrique PP′, il passe un flux n ou $2m\omega$ venant de A et un flux n' venant de A′, et, par conséquent, un flux total égal à $n + n' = N$. Il en sera de même pour tous les points de la courbe AP, déterminée par les points de rencontre, deux à deux, de droites émanées de A et de A′, et telles que la somme de leurs numéros d'ordre soit égale à N ; le lieu de tous ces points est évidemment une ligne de force d'ordre N pour le système résultant.

Au voisinage de l'une des masses agissantes, la force ne dépend que de cette masse, dont l'influence est prédominante. La ligne de flux d'ordre N pour le système résultant est donc tangente en A à la droite d'ordre N émanée de ce point.

L'équation de la courbe AP est

$$(4) \qquad n + n' = N,$$

ou, en remplaçant ces quantités par leurs valeurs en fonction des angles,

$$(5) \qquad m\omega + m'\omega' = m\theta.$$

Telle est l'équation des lignes de force émanées du point A ; une équation analogue donnera celles qui émanent du point A′. Si m et m' sont de même signe, toutes ces lignes sont infinies ; l'une quelconque d'entre elles, celle d'ordre N, par exemple, est asymptote à une droite OB faisant avec l'axe Ax

un angle α, déterminé par la condition que les droites d'ordre n et n', liées par la relation (4), soient parallèles entre elles, c'est-à-dire que l'on ait

$$(6)\quad \alpha = \frac{n}{2m} = \frac{n'}{2m'} = \frac{n+n'}{2(m+m')} = \frac{N}{2(m+m')} = \frac{m}{m+m'}\theta.$$

Toutes ces asymptotes passent par le centre de gravité O des masses m et m', ce qui est évident et facile à vérifier.

L'équation d'une ligne de force (5) et celle de son asymptote (6) donnent, par l'élimination du rapport $\frac{m'}{m}$,

$$\frac{\omega'}{\theta-\omega} = \frac{\alpha}{\theta-\alpha}.$$

C'est l'équation de la ligne de force en fonction des angles que font avec l'axe Ax l'asymptote et la tangente à l'origine.

Quant à l'équation des surfaces de niveau, elle est, en appelant r et r' les distances d'un point P aux deux lignes A et A',

$$V = C^{te} - 2[\lambda l.r + \lambda' l.r'] = C^{te} - 2l.(r^{\lambda} r'^{\lambda'}),$$

ou

$$r^{\lambda} r'^{\lambda'} = C^{te}.$$

134. Plusieurs lignes parallèles. — Il est évident que ce mode de construction est général et peut s'appliquer à un nombre quelconque de lignes électrisées A, A', A''... définies, comme plus haut, par les masses $m, m', m'', \ldots$, à la condition que ces lignes soient parallèles et situées dans un même plan.

L'équation générale des lignes de force partant du centre A de masse m sera, dans ce cas,

$$m\omega + m'\omega' + m''\omega'' \cdots\cdots = m\theta,$$

les masses $m, m', \ldots$ pouvant être positives ou négatives ; celle de l'asymptote correspondante est

$$(m + m' + m'' \cdots\cdots)\alpha = m\theta.$$

Quand toutes les masses sont de même signe, toutes les lignes de force sont infinies. Dans le cas contraire, une partie des flux de force émis par les masses positives est absorbée par les masses négatives.

D'après le mode de numération adopté, le nombre des lignes de force infinies est égal à la différence entre le nombre de lignes positives et de lignes négatives.

Si les lignes électrisées A, A', A''...., toujours parallèles, ne sont plus dans un même plan, la construction des lignes de force devient plus compliquée. Dans ce cas, le potentiel en un point P situé à des distances r, r', r''... des lignes A, A', A''...., a pour valeur

$$V = C^{te} - \sum 2\lambda l.r = C^{te} - 2l.(r^{\lambda} r'^{\lambda'} r''^{\lambda''} \ldots\ldots),$$

ou

$$r^{\lambda} r'^{\lambda'} r''^{\lambda''} \ldots\ldots = C^{te}.$$

135. Deux lignes de signes contraires. — Considérons en particulier le cas de deux lignes électrisées en sens contraires définies par les masses $+m$ et $-m'$, situées en deux points A et A' (fig. 29) à la distance $2a$, et soit m la plus grande de ces masses. L'équation d'une ligne de force devient

$$n - n' = N,$$

ou

$$m\omega - m'\omega' = m\theta;$$

celle de l'asymptote correspondante est

$$\alpha = \frac{m}{m - m'}\theta.$$

L'angle α ne pouvant devenir plus grand que π, il ne pourra y avoir de lignes de force infinies que pour les valeurs de θ plus petites que

$$\theta_0 = \pi\frac{m - m'}{m}.$$

La ligne de force AP_1 correspondant à cette valeur θ_0 sépare les $m - m'$ lignes de force partant de A et qui sont infinies des m' qui sont finies et vont s'absorber en A'. Cette ligne de force *limite* a pour équation

$$m\omega - m'\omega' = m\theta_0 = (m - m')\pi, \text{ ou } \pi - \omega' = \frac{m}{m'}(\pi - \omega).$$

Cette équation est satisfaite pour $\omega = \pi$ et $\omega' = \pi$; la ligne

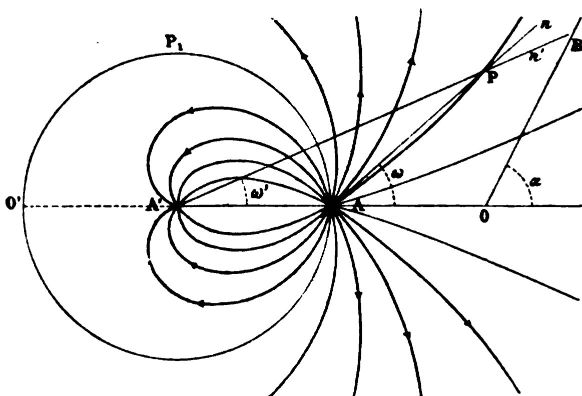


Fig. 29

rencontre donc l'axe à gauche du point A', et le point de rencontre O' est le symétrique du centre de gravité O du système par rapport à la distance AA'. En effet, on a, pour un point quelconque P_1 de la courbe,

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sin\omega'}{\sin\omega} = \frac{\sin(\pi - \omega')}{\sin(\pi - \omega)} = \frac{\sin\frac{m}{m'}(\pi - \omega)}{\sin(\pi - \omega)}.$$

Si l'angle $\pi - \omega$ tend vers zéro, il vient,

$$\text{lim.}\left(\frac{r}{r'}\right) = \frac{m}{m'}, \text{ ou } m \times O'A' = m' \times O'A.$$

Le centre de gravité O des deux masses étant déterminé par la condition $m \times OA = m' \times OA'$, il en résulte $OA = O'A'$.

Dans le cas de $m = 2m'$ (fig. 29), on a

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ et } 2\omega - \omega' = \pi,$$

on en déduit

$$r' = \frac{r}{2\sin\frac{\omega'}{2}} = 2a;$$

la ligne de force limite est donc une circonférence ayant pour centre le point A' et passant par le point A.

L'équation des surfaces de niveau est

$$V = C^{te} - 2l.\left(\frac{r^{\lambda}}{r'^{\lambda'}}\right) = C^{te} + 2l.\left(\frac{r'^{\lambda'}}{r^{\lambda}}\right),$$

ou

$$\frac{r'^{\lambda'}}{r^{\lambda}} = Ce^{\frac{V}{2}}.$$

136. Deux lignes égales et de signes contraires. — Si l'on suppose les deux masses égales en valeurs absolues, l'équation des lignes de force se réduit à

$$\omega - \omega' = \theta,$$

et celle des surfaces de niveau à

$$V = 2\lambda l.\frac{r'}{r}.$$

La première représente des segments de circonférence tels que ATA' (fig. 30) passant par les deux points A et A' et capables de l'angle θ; la seconde des circonférences S,S'... ayant leurs centres sur la droite AA', et telles que les deux points soient conjugués par rapport à chacune d'elles.

Si on considère deux surfaces de niveau S et S', une couche $+m$ sur chaque unité de longueur du cylindre S et une

couche $-m$ sur chaque unité de longueur du cylindre S', remplaceront pour tous les points compris entre les deux surfaces l'action des deux lignes indéfinies A et A' (**61**); la figure cor-

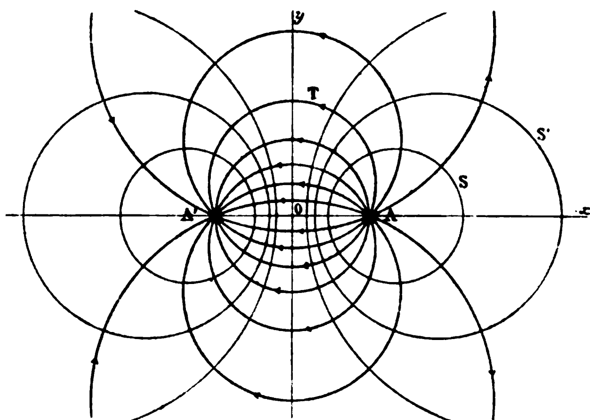


Fig. 30

respondra, dans ce cas, au problème d'un condensateur formé de deux cylindres indéfinis excentriques.

137. — Imaginons que la distance $2a$ tende vers zéro, mais que la densité λ varie de façon que le produit $2a\lambda$ reste constant. Le potentiel à la distance r, dans une direction qui fait avec la droite A'A l'angle ω, sera

$$V = 2\lambda l.\left(1 + \frac{2a\cos\omega}{r}\right) = 2\,\frac{2a\lambda\cos\omega}{r}.$$

Cette équation représente des circonférences dont les rayons varient comme les inverses des nombres entiers successifs.

On a de même, pour les lignes de force,

$$\omega - \omega' = \frac{2a\sin\omega}{r} = \theta.$$

Les rayons des circonférences qui représentent les lignes de force varient donc aussi comme les inverses des nombres entiers successifs.

138. Systèmes de révolution. — Pour déterminer sur une

surface de niveau les sections des tubes de force élémentaires, nous prendrons d'une part des plans méridiens équidistants, et d'autre part, sur la section méridienne, des points placés de telle manière que dans la révolution autour de l'axe ils partagent la surface en zones successives correspondant à un même flux. La surface se trouvera ainsi divisée en rectangles curvilignes correspondant à un même flux que l'on prendra égal à l'unité.

139. — Un *champ uniforme* peut toujours être considéré comme de révolution autour d'une ligne quelconque parallèle à la direction de la force; nous pouvons donc lui appliquer ce mode de représentation. Une surface de niveau, qui est un plan perpendiculaire à l'axe, sera coupée par une série de circonférences, comprenant entre elles des zones de surface constante. Les rayons, croissant suivant la loi des anneaux de Newton, seront proportionnels aux racines carrées des nombres consécutifs. Les lignes de force seront ainsi représentées dans le plan méridien par des droites parallèles à l'axe et dont les distances à l'axe sont comme les racines carrées des nombres entiers consécutifs.

Si F est l'intensité de champ et ω l'angle de deux méridiens, r_n et r_{n+1} les distances à l'axe de deux lignes de force successives, on devra prendre

$$F\frac{\omega}{2}(r_{n+1}^2 - r_n^2) = 1,$$

ou

$$r_n = \sqrt{\frac{2}{F\omega}}\sqrt{n}.$$

Ce mode de représentation a l'inconvénient, comme on le voit, de ne pas figurer un champ uniforme par des lignes de force équidistantes.

140. Cas d'une masse unique. — Une masse unique m donne un système de révolution autour d'un axe quelconque passant par la masse agissante. Par des plans normaux à un axe Ax (fig. 31), on divisera la sphère en zones concentriques successives de même surface et correspondant à un même flux.

Le flux correspondant au cône circulaire dont le demi angle au sommet est θ est proportionnel à la surface de la calotte de demi-ouverture θ, c'est-à-dire à la hauteur PB ou à $1-\cos\theta$.

Soit N l'ordre de la ligne de force AN, on aura

$$\frac{N}{4\pi m}=\frac{1-\cos\theta}{2},$$

ou

$$\cos\theta=1-\frac{N}{2\pi m}. \tag{7}$$

Pour tracer les lignes de force, il suffira donc de diviser le diamètre BB' (fig. 32) en $4\pi m$ parties égales, de mener les

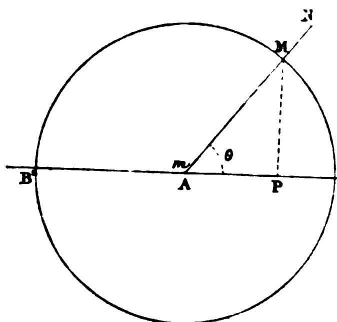


Fig. 31

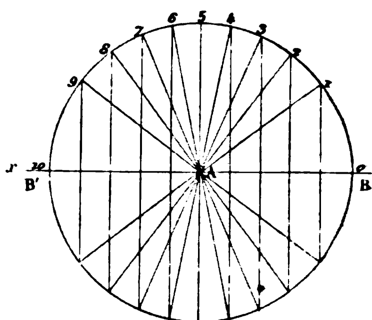


Fig. 32

verticales correspondantes et de joindre au point A les points d'intersection avec la circonférence.

141. Deux masses quelconques. — Soient maintenant deux masses m et m' situées en A et A' (fig. 28); elles forment un système de révolution par rapport à la droite qui les joint. Le flux total qui traverse une zone quelconque de révolution dont le demi-arc est PP' est la somme des flux qui correspondent aux angles ω et ω' pour les deux masses séparément, c'est-à-dire à $n+n'=N$.

Par la même raison que plus haut, la nappe qui correspond au flux de valeur N et qui passe par le point P est tangente

en A au cône d'angle au sommet 2θ, qui comprend le même flux pour la masse m prise isolément.

Cette nappe est aussi asymptote à un cône ayant pour sommet le centre de gravité O des deux masses.

L'équation de la ligne de force AP, c'est-à-dire $n+n'=N$, donne

$$2\pi m(1-\cos\omega)+2\pi m'(1-\cos\omega')=N=2\pi m(1-\cos\theta),$$

ou

$$(8) \qquad m\cos\omega+m'\cos\omega'=m'+m\cos\theta.$$

Pour obtenir l'angle α de l'asymptote avec l'axe, il suffit de faire les deux angles ω et ω' égaux dans cette équation ; on obtient ainsi

$$(9) \qquad (m+m')\cos\alpha=m'+m\cos\theta.$$

En éliminant le rapport $\frac{m}{m'}$ entre les équations (8) et (9), on a l'équation de la ligne de force en fonctions de θ et de α :

$$\frac{1-\cos\omega'}{\cos\omega-\cos\theta}=\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha-\cos\theta}.$$

Cette méthode est encore générale et peut s'appliquer à un nombre quelconque de centres situés sur une même droite.

L'équation d'une ligne de force partant de la masse m est

$$m\cos\omega+m'\cos\omega'+m''\cos\omega''\ldots\ldots=m'+m''+\ldots\ldots+m\cos\theta,$$

et celle de l'asymptote,

$$(m+m'+m''\ldots\ldots)\cos\alpha=m'+m''+m'\ldots\ldots+m\cos\theta.$$

Lorsque les masses sont toutes de même signe, toutes les lignes de force sont infinies. S'il y a des masses de signes contraires, la région qui renferme les lignes de force finies, émises par des masses positives et absorbées par des masses négatives, est séparée de la région qui renferme les lignes de force infinies par une surface limite dont la section méridienne est dé-

terminée par la valeur de l'angle θ donnée par l'équation précédente dans laquelle on fait $\alpha = \pi$.

142. Deux masses égales et de même signe. — Si le système est formé de deux masses égales et de même signe situées en A et A′ à la distance $2a$ (fig. 33), les surfaces de niveau sont données par l'équation

$$V = \frac{m}{r} + \frac{m}{r'} = m\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Les courbes méridiennes sont des espèces de lemmiscates. La surface correspondant à $V = \frac{2m}{a}$ a pour courbe méridienne

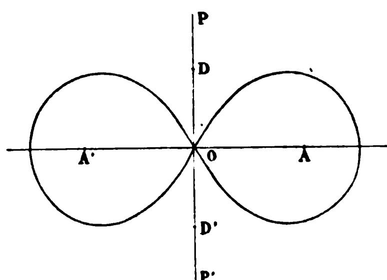


Fig. 33

deux lobes qui se coupent en O. Le point O est un point d'équilibre instable ; la force y est égale à zéro. En ce point, le potentiel présente un minimum relativement à l'axe AA′ et un maximum par rapport au plan de symétrie PP′.

Pour toutes les valeurs de V supérieures à $\frac{2m}{a}$, la surface de niveau se compose de deux lobes séparés dont la section a la forme d'un ovale et qui entourent chacun des deux centres. Ces ovales tendent de plus en plus à se confondre avec des cercles à mesure qu'on se rapproche du centre.

Pour les valeurs de V inférieures à $\frac{2m}{a}$, la surface se compose d'une nappe unique dont l'étranglement tend à disparaître au fur et à mesure que V diminue et qui finalement se

confondrait à une grande distance avec une sphère ayant pour centre le point O.

L'équation des lignes de force est

$$\cos\omega + \cos\omega' = 1 + \cos\theta,$$

et celle de l'asymptote

$$2\cos\alpha = 1 + \cos\theta,$$

ou

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{1}{2}\theta.$$

En un point de l'axe transverse OP, la force a pour expression

$$F = \frac{2m}{r^2}\sin\omega = \frac{2m}{r^2}\frac{y}{r} = 2m\frac{y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

elle est maximum en des points D et D' pour lesquels

$$y = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

C'est un maximum relatif à l'axe transverse seulement et au contraire un minimum pour la direction parallèle à AA'.

Les lignes de force émanées de m et de m' sont séparées par le plan normal à l'axe AA' passant au point O.

143. Deux masses inégales et de même signe. — Si les masses, toujours de même signe, sont inégales, la forme générale des surfaces de niveau est la même que dans le cas précédent, sauf la symétrie. Le point d'équilibre correspondant au point de croisement de la surface à deux nappes est donné par la relation

$$\frac{m}{r^2} = \frac{m'}{r'^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{r}{r'} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m'}}.$$

En posant $r + r' = 2a$, on en déduit

$$r = 2a\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{m'}} = 2a\frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{m'}{m}}}.$$

Les lignes de force ont pour équation

$$m\cos\omega + m'\cos\omega' = m' + m\cos\theta.$$

Elles forment toujours deux systèmes distincts ; la surface qui les sépare correspond à $\theta = \pi$, et a pour équation

$$m\cos\omega + m'\cos\omega' = m' - m.$$

Si on pose $\frac{m'}{m} = 1 + \varepsilon$, l'équation devient

$$\cos\omega + (1+\varepsilon)\cos\omega' = \varepsilon,$$

ou, en coordonnées rectangulaires, l'origine étant prise au milieu de la distance $2a$,

$$\frac{x-a}{\sqrt{y^2+(x-a)^2}} + (1+\varepsilon)\frac{x+a}{\sqrt{y^2+(x+a)^2}} = \varepsilon.$$

Cette équation représente une surface du sixième degré qui passe par le point d'équilibre et qui a quelque analogie avec une nappe d'hyperboloïde. Sa section méridienne, comme toutes les autres lignes de force, a une asymptote, qui passe par le centre de gravité des deux masses. Cette asymptote a pour équation

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}.$$

144. Deux masses égales et de signes contraires. — Nous examinerons avec plus de détails le cas de deux masses égales et de signes contraires, parce qu'il donne lieu à plusieurs applications importantes.

Les surfaces de niveau, dont l'équation est

$$V = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

sont des surfaces fermées ovoïdes, à une seule nappe, tendant à se confondre avec des sphères au fur et à mesure qu'elles

se rapprochent des centres d'action. Toutes celles qui correspondent à des valeurs positives de V entourent le point A, celles qui correspondent à des valeurs négatives le point A'. Elles sont séparées par un plan de symétrie au potentiel zéro.

Les lignes de force ont pour équation

$$\cos\omega - \cos\omega' = 1 - \cos\theta = \frac{N}{2\pi m}. \tag{10}$$

Ces lignes de force sont toutes finies et partent du point A pour aboutir au point A'; elles sont évidemment symétriques

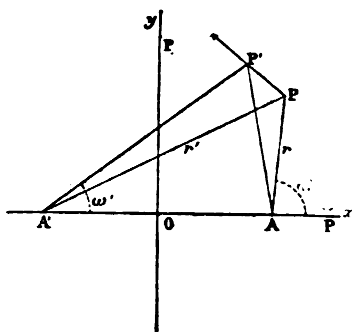


Fig. 34

par rapport au plan de potentiel zéro perpendiculaire en O à l'axe AA' (fig. 34).

145. — Les angles β et β' que fait la force avec les rayons vecteurs sont déterminés par la condition

$$\frac{r}{\sin\beta}d\omega = \frac{r'}{\sin\beta'}d\omega' = PP', \tag{11}$$

donnée par les triangles infiniment petits APP' et A'PP'; on a d'ailleurs, par l'équation (10),

$$\sin\omega d\omega = \sin\omega' d\omega',$$

et, par suite,

$$\frac{\sin\omega\sin\beta}{r} = \frac{\sin\omega'\sin\beta'}{r'}.$$

En remplaçant le rapport de rayons vecteurs dans cette équation par le rapport des sinus des angles opposés dans le triangle APA′, on obtient,

$$\sin^2\omega \sin\beta = \sin^2\omega' \sin\beta', \tag{12}$$

ou

$$\frac{\sin\beta}{r^2} = \frac{\sin\beta'}{r'^2}.$$

146. — La force a pour expression

$$F = m\left[\frac{\cos\beta}{r^2} + \frac{\cos\beta'}{r'^2}\right]. \tag{13}$$

Sa valeur sur l'axe AA′, en P_1, à la distance d du centre, est

$$F_1 = m\left[\frac{1}{(d-a)^2} - \frac{1}{(d+a)^2}\right] = 2ma\frac{2d}{(d^2-a^2)^2} \tag{14}$$

et sur l'axe transverse, en P_2, ρ désignant la distance AP_2,

$$F_2 = 2ma\frac{1}{\rho^3} = 2ma\frac{1}{(d^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{15}$$

Le produit $2ma$ de l'une des masses par la distance qui les sépare, que l'on appellera *moment magnétique* dans le problème correspondant de magnétisme, peut être appelé ici le *moment électrique* du système.

147. — Quand la force est normale à l'axe, on a

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad \sin\beta = \cos\omega,$$

$$\beta' = \frac{\pi}{2} + \omega', \quad \sin\beta' = \cos\omega';$$

l'équation (12) devient

$$\cos\omega \sin^2\omega = \cos\omega' \sin^2\omega',$$

ou

$$\frac{\cos\omega}{r^2}=\frac{\cos\omega'}{r'^2}.$$

C'est l'équation de la courbe APX (fig. 35) qui passe par tous les points du plan où la force est verticale. Elle se compose de deux branches symétriques, partant de A et de A' tangentiellement à la verticale et asymptotes à une droite OL.

Pour déterminer la direction de l'asymptote, considérons un point très éloigné; on aura, en appelant δ la différence

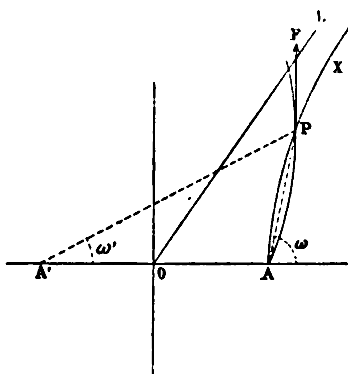


Fig. 35

très petite $\omega-\omega'$ et remarquant que les angles ω et ω' deviennent égaux,

$$\frac{\cos\omega}{r^2}=\frac{\cos\omega'}{r'^2}=\frac{\cos\omega'-\cos\omega}{r'^2-r^2}=\frac{\sin\omega.\delta}{2r(r'-r)}=\frac{\sin\omega}{2r^2}.\frac{r\delta}{r'-r}$$
$$=\frac{\sin\omega.2a\sin\omega}{2r^2.2a\cos\omega}=\frac{1}{2r^2}\frac{\sin^2\omega}{\cos\omega},$$

ou

$$\tan^2\omega=2.$$

148. Principe des images. — Nous avons vu (**59**) qu'on peut toujours remplacer une masse électrique quelconque par une masse égale répandue sur une surface de niveau qui l'entoure complètement. Cette couche est en équilibre d'elle-

même, et la densité est déterminée par la condition

$$\sigma = \frac{F}{4\pi}.$$

Pour tous les points intérieurs, le potentiel devient constant et égal à celui de la surface ; mais pour tous les points extérieurs rien n'est changé à l'état du champ.

Considérons, dans le problème précédent, le plan transversal Oy au potentiel zéro (fig. 34). Pour tous les points situés à droite, nous pouvons remplacer la masse $-m$ située en A′ par

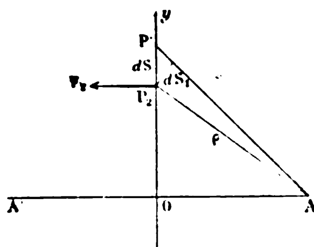


Fig. 36

une masse égale en équilibre sur le plan. La densité sera en chaque point P_2, la force F_2 étant dirigée vers la gauche,

$$-\sigma = \frac{F_2}{4\pi} = \frac{(2ma)}{4\pi} \cdot \frac{1}{\rho^3}.$$

On voit qu'elle est *en raison inverse du cube* de la distance du point considéré P_2 au point A.

On peut remarquer, d'après cette loi de distribution, que la charge d'un élément du plan est en chaque point proportionnel à l'angle sous lequel on le voit du point A. En effet la charge d'un élément de surface dS (fig. 36) est

$$-\sigma dS = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{a}{\rho} dS.$$

Or, $\frac{a}{\rho} dS$ est la projection dS_1 de l'élément dS sur un plan

perpendiculaire à ρ, et $\frac{dS_1}{\rho^2}$ est l'angle $d\theta$ sous lequel du point A on voit l'élément dS.

On a donc

$$-\sigma dS = \frac{m}{2\pi} d\theta.$$

Si le plan, ou la masse $-m$, n'existait pas, le flux de force émis par la masse m dans l'angle $d\theta$ serait $md\theta$. Dans le cas actuel, le flux reçu par la surface dS est $4\pi \frac{m}{2\pi} d\theta = 2md\theta$. La distribution de ce flux est la même que si la masse m existait seule, mais le flux est doublé en chaque point, toutes les lignes de force qui émanent de m rencontrant le plan.

Le plan, recouvert de la masse $-m$, étant au potentiel zéro, tout l'espace situé à gauche est au potentiel zéro. C'est le cas d'un plan conducteur indéfini Oy, en communication avec le sol, et soumis à l'influence d'une masse électrique $+m$ placée au point A. Un pareil plan intercepte complètement l'action de la masse m sur les points situés derriére lui; il fait l'office d'un *écran électrique*.

Ainsi, la masse $+m$ étant placée en A, en présence d'un plan conducteur Oy en communication avec le sol, on peut, pour les points situés à droite, remplacer ce plan par une masse $-m$ située au point A' symétrique de A.

Pour sir W. Thomson la masse $-m$ en A' est, par rapport au plan Oy relié au sol, l'*image* de la masse $+m$ située en A. On voit, en effet, l'analogie qui existe entre le phénomène électrique et le phénomène optique correspondant. Si le point A est une source de lumière et le plan Oy un miroir réflecteur, l'image de A est virtuelle et située en A'; l'éclairement de l'espace situé à droite du plan est le même que si on remplaçait ce plan par une source de lumière située en A', et l'intensité de cette source virtuelle sera égale à celle de A si le pouvoir réflecteur du plan est égal à l'unité.

149. Induction dans un milieu formé de deux diélectriques séparés par un plan. — Le principe des images permet de déterminer l'état de deux diélectriques indéfinis, séparés par

une surface plane, dans l'un desquels se trouve une masse agissante.

Soit m cette masse placée au point A (fig. 37), μ_1 et μ_2 les pouvoirs inducteurs des deux diélectriques séparés par le plan Q, la masse agissante étant située dans le premier.

L'équilibre peut être établi en supposant sur le plan Q une couche m' distribuée comme elle le serait sur un plan conducteur non isolé sous l'influence d'une masse m' placée en A ou au point symétrique B; en d'autres termes, le plan agira sur tous les points situés à sa gauche comme une masse m' placée en A et sur tous les points situés à droite, comme la même

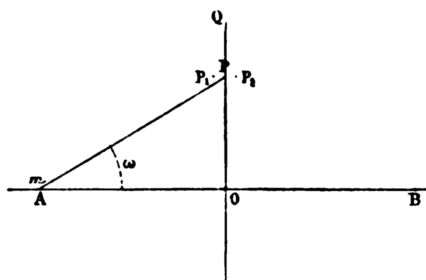


Fig. 37

masse m' placée en B. Le potentiel au voisinage du point P pris dans le plan Q est dans le premier milieu, en P_1,

$$V_1 = \frac{m}{PA} + \frac{m'}{PB},$$

et dans le second milieu, en P_2,

$$V_2 = \frac{m}{PA} + \frac{m'}{PA}.$$

Les composantes normales de la force sont, aux mêmes points,

$$N_1 = \frac{\cos\omega}{\rho^2}(m - m'),$$

$$N_2 = \frac{\cos\omega}{\rho^2}(m + m').$$

Pour satisfaire à l'équation de continuité des diélectriques, il faut que le produit de la composante normale par le pouvoir inducteur spécifique soit le même de part et d'autre de la surface de séparation, ce qui donne

$$\mu_1(m - m') = \mu_2(m + m'),$$

ou

$$m' = m\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = m\gamma.$$

La densité en chaque point du plan est

$$\sigma' = \frac{2m'a}{4\pi}\cdot\frac{1}{\rho^3} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\cdot\frac{2ma}{4\pi}\cdot\frac{1}{\rho^3} = \gamma\frac{2ma}{4\pi}\cdot\frac{1}{\rho^3}.$$

150. Trois diélectriques séparés par des plans parallèles. — Supposons qu'il y ait trois milieux différents, de pouvoirs in-

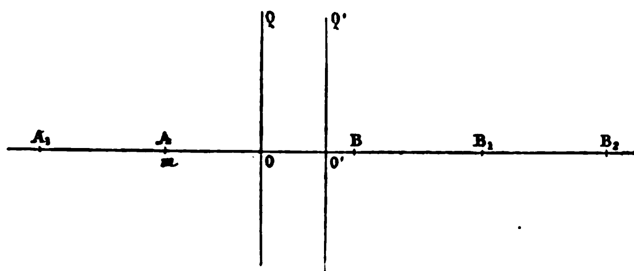


Fig. 38.

ducteurs spécifiques égaux respectivement à μ_1, μ_2 et μ_3, séparés par des plans parallèles Q et Q', et que la masse agissante m soit située dans le premier milieu, en A (fig. 38).

Posons encore

$$\gamma = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2},$$

$$\gamma' = \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 + \mu_3}.$$

La condition d'équilibre sur le plan Q est satisfaite par une

couche $m\gamma$ qui agit, de part et d'autre, comme si elle était en A ou en B.

La masse m en A et la couche $m\gamma$ du plan Q produisent sur le plan Q' une couche $m(1+\gamma)\gamma' = m'$, qui agira comme si elle était concentrée en A ou en B_1.

La couche m', réagissant sur le plan Q, y produira une couche $-m'\gamma$, dont l'image est en B_1 ou A_1.

De même, la couche $-m'\gamma$ en Q donne sur Q' une couche $-m'\gamma\gamma'$ dont l'image est A_1 ou B_2..., etc.

La détermination de ces couches successives n'est pas autre chose que l'application de la méthode de Murphy.

On aura ainsi, de proche en proche :
sur le plan Q,

Couches successives.	Images.	
$m\gamma$	A ou	B
$-m'\gamma$	A_1	B_1
$+m'\gamma^2\gamma'$	A_2	B_2
$-m'\gamma^3\gamma'^2$	A_3	B_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

et, sur le plan Q',

Couches successives.	Images.	
$m(1+\gamma)\gamma' = m'$	A ou	B_1
$-m'\gamma\gamma'$	A_1	B_2
$+m'\gamma^2\gamma'^2$	A_2	B_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

La somme algébrique de toutes ces couches donnera l'état d'équilibre définitif.

Les charges totales M et M' des plans Q et Q' seront

$$M = m\gamma - m'\gamma[1 - \gamma\gamma' + (\gamma\gamma')^2 - (\gamma\gamma')^3 + \ldots\ldots] = m\gamma - m'\gamma\frac{1}{1+\gamma\gamma'}$$
$$= m\gamma\left[1 - \frac{(1+\gamma)\gamma'}{1+\gamma\gamma'}\right] = m\frac{\gamma(1-\gamma')}{1+\gamma\gamma'}.$$
$$M' = m'[1 - \gamma\gamma' + (\gamma\gamma')^2 - \ldots\ldots] = m'\frac{1}{1+\gamma\gamma'} = m\frac{\gamma'(1+\gamma)}{1+\gamma\gamma'}.$$

La densité en chaque point est égale à la somme algébrique des densités de toutes les couches superposées.

Le potentiel V, en un point P dans le premier milieu, peut être considéré comme produit par la masse m et toutes les images situées en B, B_1, B_2..., etc.

Aux différents points B_1, B_2..., il y a deux images différentes provenant des couches des deux plans Q et Q′ et l'on a :

en B_1

$$m' - m'\gamma = m'(1-\gamma) = m(1-\gamma^2)\gamma',$$

en B_2

$$-m'\gamma\gamma' + m'\gamma^2\gamma' = -m'\gamma\gamma'(1-\gamma) = -m(1-\gamma^2)\gamma'.\gamma\gamma',$$

....

en B_{n+1}

$$\pm m'(\gamma\gamma')^n \mp m'(\gamma\gamma')^n\gamma = \pm m'(\gamma\gamma')^n(1-\gamma) = \pm m(1-\gamma^2)\gamma'(\gamma\gamma')^n;$$

ce qui donne

$$V_1 = m\left\{\frac{1}{PA} + \frac{\gamma}{PB} + (1-\gamma^2)\gamma'\left[\frac{1}{PB_1} - \frac{\gamma\gamma'}{PB_2} + \frac{(\gamma\gamma')^2}{PB_3} \cdots \pm \frac{(\gamma\gamma')^n}{PB_{n+1}} \pm \cdots\right]\right\}$$

Le potentiel V_3 dans le troisième milieu est produit, de même, par les images situées aux points A, A_1, A_2..., sur lesquelles les masses sont :

$$m + m\gamma + m' = m(1+\gamma)(1+\gamma'),$$
$$-m'\gamma - m'\gamma\gamma' = -m(1+\gamma)(1+\gamma')\gamma\gamma',$$
....
$$\pm(m'\gamma^n\gamma'^{n-1} + m'\gamma^n\gamma'^n) = \pm m(1+\gamma)(1+\gamma')(\gamma\gamma')^n;$$

on a donc

$$V_3 = m(1+\gamma)(1+\gamma')\left[\frac{1}{PA} - \frac{\gamma\gamma'}{PA_1} + \frac{(\gamma\gamma')^2}{PA_2} - \cdots \pm \frac{(\gamma\gamma')^n}{PA_n} \cdots\right].$$

Enfin, dans le second milieu, compris entre les plans Q et Q′, le potentiel est dû à la masse m, aux images situées en A_1,

$A_2 \ldots$ des couches du plan Q et aux images situées en B_1 $B_2 \ldots$ des couches du plan Q'. On trouverait de même

$$V_2 = m(1+\gamma)\left[\frac{1}{PA} - \frac{\gamma\gamma'}{PA_1} + \frac{(\gamma\gamma')^2}{PA_2} - \ldots\ldots\right]$$
$$+ m(1+\gamma)\gamma'\left[\frac{1}{PB_1} - \frac{\gamma\gamma'}{PB_2} + \frac{(\gamma\gamma')^2}{PB_3} - \ldots\ldots\right].$$

Si le troisième milieu est identique au premier, il suffit de poser $\mu_1 = \mu_3$, et l'on a $\gamma' = -\gamma$.

Il vient alors

$$M = m\frac{\gamma(1+\gamma)}{1-\gamma^2} = m\frac{\gamma}{1-\gamma},$$
$$M' = -m\frac{\gamma(1+\gamma)}{1-\gamma^2} = -m\frac{\gamma}{1-\gamma},$$
$$V_1 = m\left\{\frac{1}{PA} + \frac{\gamma}{PB} - (1-\gamma^2)\gamma\left[\frac{1}{PB_1} + \frac{\gamma^2}{PB_2} + \ldots + \frac{\gamma^{2n}}{PB_{n+1}} + \ldots\right]\right\},$$
$$V_3 = m(1-\gamma^2)\left[\frac{1}{PA} + \frac{\gamma^2}{PA_1} + \frac{\gamma^4}{PA_2} + \ldots\ldots + \frac{\gamma^{2n}}{PA_n} + \ldots\ldots\right],$$
$$V_2 = m(1+\gamma)\left\{\left[\frac{1}{PA} + \frac{\gamma^2}{PA_1} + \ldots\ldots\right] - \gamma\left[\frac{1}{PB_1} + \frac{\gamma^2}{PB_2} + \ldots\ldots\right]\right\}.$$

En désignant respectivement par α et β les deux séries qui renferment les distances PA, $PA_1 \ldots$, PB_1, $PB_2 \ldots$, lesquelles sont des fonctions déterminées des coordonnées du point P, on a simplement

$$V_1 = m\left[\frac{1}{PA} + \frac{\gamma}{PB} - (1-\gamma^2)\gamma\beta\right],$$
$$V_3 = m(1-\gamma^2)\alpha,$$
$$V_2 = m(1+\gamma)[\alpha - \gamma\beta].$$

151. Deux masses égales de signes contraires infiniment voisines. — Supposons que les deux masses égales et de signes contraires $+m$ et $-m$ du problème (**144**) soient infiniment voisines ou, ce qui revient au même, que nous considérions l'état du champ à une distance très grande par rapport à la dis-

tance $2a$ des deux points A et A'. La valeur du potentiel en un point P (fig. 39),

$$V = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = m\frac{r'-r}{rr'},$$

se réduit à

$$V = m\frac{r'-r}{r^2} = 2am\frac{\cos\omega}{R^2} = 2am\frac{x}{R^3},$$

en appelant ω l'angle de la direction OP avec l'axe A'A.

Soit ϖ une surface, un cercle par exemple, menée par le

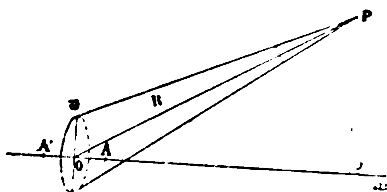


Fig. 39

point O perpendiculairement à AA' et appelons θ l'angle solide sous lequel on voit cette surface du point P ; on a

$$R^2\theta = \varpi\cos\omega,$$

et, par suite,

$$V = \frac{2ma}{\varpi}\theta.$$

Si on prend $\varpi = 2ma$, il vient

$$V = \theta. \qquad (16)$$

Ainsi *la valeur du potentiel en un point est l'angle solide sous lequel on voit de ce point une surface égale au moment électrique* $2ma$ *des deux masses et perpendiculaire au milieu de la droite qui les joint.*

L'équation des surfaces de niveau,

$$V = \frac{\varpi\cos\omega}{R^2} = \frac{\varpi x}{R^3}, \qquad (17)$$

montre que toutes ces surfaces sont semblables et que pour une même direction ω les valeurs de R sont en raison inverse des racines carrées des potentiels.

152. — Dans l'équation des lignes de force,

$$\cos\omega' - \cos\omega = \frac{N}{2\pi m},$$

le premier membre peut être transformé de la manière sui-

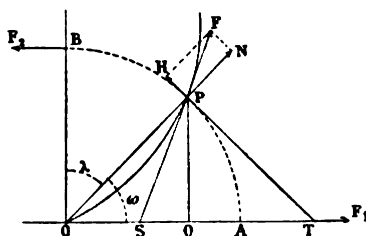


Fig. 40

vante, en appelant δ la différence infiniment petite $\omega - \omega'$:

$$\cos\omega' - \cos\omega = d.\cos\omega = \sin\omega.\delta = \sin\omega.\frac{2a\sin\omega}{R} = \frac{2a}{R}\sin^2\omega.$$

On a donc

$$(18) \qquad \frac{\sin^2\omega}{R} = \frac{1}{2a}.\frac{N}{2\pi m} = \frac{N}{2\pi(2ma)} = \frac{N}{2\pi\varpi}.$$

Toutes ces courbes sont semblables et, pour une même direction, la distance R est en raison inverse de N. Elles sont tangentes à l'axe à l'origine ; le lieu des points où la tangente est verticale est évidemment l'asymptote trouvée dans le problème précédent (**144**) et qui a pour équation,

$$\tan^2\omega = 2.$$

153. — Les équations (14) et (15) du n° **146** donnent pour valeurs de la force sur l'axe et sur la transversale, en A et

en B (fig. 40)

$$F_1 = 2\frac{\varpi}{R^3},$$

$$F_2 = \frac{\varpi}{R^3},$$

et, par suite,

$$F_1 = 2F_2.$$

Pour un point P situé à la même distance dans une direction quelconque ω, on a, d'après l'équation (17),

$$(19)\quad \begin{aligned} X &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\varpi\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^2}\right) = \frac{\varpi}{R^3}(3\cos^2\omega - 1), \\ Y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = -\varpi\frac{-3xy}{r^5} = \frac{\varpi}{R^3}3\sin\omega\cos\omega. \end{aligned}$$

Du point O, comme centre, menons la circonférence de rayon R qui passe au point P et considérons en ce point la composante normale F_n et la composante tangentielle F_t de la force; on a

$$(20)\quad \begin{aligned} F_n &= X\cos\omega + Y\sin\omega = \frac{\varpi}{R^3}2\cos\omega, \\ F_t &= -X\sin\omega + Y\cos\omega = \frac{\varpi}{R^3}\sin\omega. \end{aligned}$$

Si on désigne par i l'inclinaison de la force F sur la tangente et par λ le complément de l'angle ω, il vient

$$(21)\quad \operatorname{tang} i = \frac{F_n}{F_t} = 2\operatorname{cotg}\omega = 2\operatorname{tang}\lambda.$$

On obtient enfin, pour la force elle-même,

$$(22)\quad \begin{aligned} F^2 = X^2 + Y^2 = F_n^2 + F_t^2 &= \left(\frac{\varpi}{R^3}\right)^2(3\cos^2\omega + 1) \\ &= \left(\frac{\varpi}{R^3}\right)^2(3\sin^2\lambda + 1) \end{aligned}$$

154. — Prolongeons la tangente jusqu'à l'axe en T et la direction de la force jusqu'en S; les triangles OPS et SPT donnent

$$\frac{PS}{\sin\omega}=\frac{OS}{\cos i},$$
$$\frac{PS}{\cos\omega}=\frac{ST}{\sin i};$$

on en déduit

$$OS\frac{\sin\omega}{\cos i}=ST\frac{\cos\omega}{\sin i},$$

et enfin

$$OS \operatorname{tang} i=ST \operatorname{cotg}\omega=ST \operatorname{tang}\lambda.$$

Comme $\operatorname{tang} i=2\operatorname{tang}\lambda$, on voit que

$$ST=2OS,$$

ou

$$(23) \qquad OT=3OS.$$

Ce théorème est dû à Gauss.

La valeur de la force s'exprime facilement en fonction des mêmes lignes. On a, en effet,

$$R=OT\cos\omega=3OS\cos\omega,$$
$$OQ=R\cos\omega,$$

et, par suite,

$$3\cos^2\omega=\frac{OQ}{OS}.$$

On obtient donc, en substituant,

$$(24) \qquad F^2=\left(\frac{\varpi}{R^3}\right)^2\left(\frac{OQ}{OS}+1\right).$$

155. — Dans l'évaluation de la force en chaque point, les masses électriques n'interviennent que par leur moment $2ma=\varpi$ qui peut rester fini pour des valeurs convenables de m quoique la distance $2a$ soit infiniment petite. Le flux total de force qui émane des deux centres infiniment voisins n'est donc

pas déterminé, mais il est facile de calculer le flux qui sort d'une sphère de rayon donné R.

La composante normale au point P correspondant à l'angle ω a pour valeur, d'après les équations (20),

$$F_n = \frac{\varpi}{R^3} 2 \cos\omega.$$

La surface de la calotte d'ouverture angulaire 2ω étant égale à $2\pi R^2(1-\cos\omega)$, celle de la zone élémentaire correspondant à l'angle $d\omega$ est

$$dS = 2\pi R^2 \sin\omega d\omega.$$

Le flux de force qui traverse cette zone est donc

$$dQ = \frac{4\pi\varpi}{R} \sin\omega \cos\omega \, d\omega$$

et le flux total correspondant à l'angle ω est

$$Q_\omega = \frac{4\pi\varpi}{R} \int \sin\omega \cos\omega \, d\omega = \frac{2\pi\varpi}{R} \sin^2\omega.$$

Cette expression n'est autre que celle de la ligne de force d'ordre N qui aboutit au contour de la zone considérée, et on aurait pu l'écrire immédiatement.

Si on fait $\omega = \frac{\pi}{2}$, on aura le flux total d'un côté du plan transversal OB ; ce flux a pour valeur $\frac{2\pi\varpi}{R}$; on voit qu'il est en raison inverse de R.

Pour tracer dans un plan méridien les lignes de force qui correspondent aux flux représentés par les nombres 1, 2, 3, 4..., il suffira donc de prendre sur l'axe transverse des longueurs proportionnelles aux nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$, et de tracer, d'après l'équation (18), les lignes de force qui coupent l'axe en ces différents points.

156. Induction sur un corps infiniment petit. — Le système de deux masses égales et contraires infiniment voisines représente l'état d'un corps infiniment petit, conducteur ou non, primitivement neutre et placé dans un champ électrique quelconque. En effet, le corps se couvre alors de deux couches de masses égales et de signes contraires, dont chacune agit comme si elle était concentrée en son centre de gravité.

Il en est de même pour un corps quelconque primitivement neutre, c'est-à-dire avec une charge totale nulle, quand on considère son action à une grande distance.

157. Sphère polarisée. — Couches de glissement. — Considérons deux sphères S et S′ de même rayon (fig. 41), de

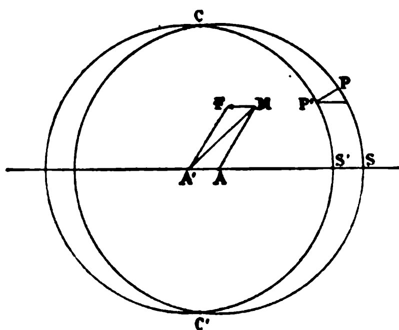


Fig. 41

densités uniformes $+\rho$ et $-\rho$ et dont les centres A et A′ sont à une distance infiniment petite δ. Ce système équivaut en réalité à celui de deux couches égales et de signes contraires répandues sur les deux moitiés d'une surface sphérique.

Cette forme particulière d'électrisation présente un grand intérêt et correspond en magnétisme à un mode d'aimantation très simple. On peut, pour abréger, appeler *couches de glissement* celles qui sont ainsi produites par deux masses homogènes de densités égales et de signes contraires dont l'une a glissé d'une quantité infiniment petite.

Le milieu peut être considéré comme *polarisé*, et l'axe de polarisation électrique est parallèle à la direction suivant laquelle s'est effectué le glissement.

Dans le cas actuel, la densité de la couche en chaque point est proportionnelle à l'épaisseur correspondante P'P de la partie non commune aux deux sphères. Si nous désignons par σ_0 cette densité sur la ligne des centres, on aura

$$\sigma_0 = \rho\delta.$$

Comme l'épaisseur de la couche suivant la ligne des centres est constante, la densité en un point P, à l'extrémité du rayon qui fait avec cette droite l'angle ω, a pour valeur

$$\sigma = \sigma_0 \cos\omega = \rho\delta\cos\omega.$$

Sur un point M pris à l'intérieur, l'action est celle de deux sphères homogènes de rayons AM et A'M sur un point de leur surface respective. Elle est donc, pour la sphère A, égale à $\frac{4}{3}\pi\rho.\mathrm{AM}$ et dirigée suivant AM; pour la sphère A', elle est égale à $\frac{4}{3}\pi\rho.\mathrm{MA'}$ et dirigée suivant MA'. Par suite, la résultante est proportionnelle à AA' et a pour valeur

$$\frac{4}{3}\pi\rho.\mathrm{AA'} = \frac{4}{3}\pi\rho\delta = \frac{4}{3}\pi\sigma_0;$$

elle est constante. Désignons cette force par F_i et comptons-la positivement de gauche à droite, nous aurons

$$F_i = -\frac{4}{3}\pi\sigma_0.$$

A l'intérieur de la sphère, les surfaces de niveau sont des plans perpendiculaires à l'axe AA' et équidistants; le potentiel en un point varie proportionnellement à l'abscisse x du point et, comme il est nul au centre, on a

$$V_i = \frac{4}{3}\pi\sigma_0 x.$$

Pour l'extérieur, la couche considérée peut être remplacée

par les deux sphères homogènes ou par deux masses de signes contraires égales à $\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ concentrées en A et en A', et dont le moment est

$$\varpi = \delta . \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \sigma_0 = u\sigma_0,$$

en appelant u le volume de la sphère. On aura donc pour la distance r, dans une direction qui fait l'angle ω avec l'axe,

$$V_e = u\sigma_0 \frac{\cos\omega}{r^2} = u\sigma_0 \frac{x}{r^3}.$$

La surface de la zone élémentaire $d\omega$ étant

$$dS = 2\pi R^2 \sin\omega \, d\omega,$$

la masse correspondante est

$$\sigma dS = 2\pi R^2 \sigma_0 \sin\omega \cos\omega \, d\omega = d.\pi R^2 \sigma_0 \sin^2\omega.$$

La masse totale M de chacune des couches est donc

$$M = \int \sigma dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d.\pi R^2 \sigma_0 \sin^2\omega = \pi R^2 \sigma_0.$$

On aurait pu écrire immédiatement ce résultat en remarquant qu'en chaque point de la couche l'épaisseur suivant l'axe étant égale à δ, le volume total est égal au produit de cette épaisseur constante par la projection de l'hémisphère sur un plan perpendiculaire à AA'.

Le flux de force qui émane de la couche positive est

$$Q = 4\pi M = (4\pi R^2)\pi\sigma_0 = S\pi\sigma_0,$$

S étant la surface entière de la sphère.

158. — Il est utile de résumer ici tous les résultats qui

précèdent et d'exprimer chacune des quantités en fonction de la densité maximum σ_0 ou de la force intérieure F_i; on a ainsi, en désignant par a le rayon de la sphère et u son volume,

$$F_i = -\frac{4}{3}\pi\rho\delta = -\frac{4}{3}\pi\sigma_0 = -\frac{u\sigma_0}{a^3},$$

$$\varpi = u\sigma_0 = -a^3 F_i,$$

$$V_i = \frac{u\sigma_0 x}{a^3} = -F_i x = -F_i r \cos\omega,$$

$$V_e = u\sigma_0 \frac{x}{r^3} = -F_i \frac{a^3}{r^3} x = -F_i \frac{a^3 \cos\omega}{r^2},$$

$$X_e = \frac{u\sigma_0}{r^3}(3\cos^2\omega - 1) = F_i \frac{a^3}{r^3}(1 - 3\cos^2\omega),$$

$$Y_e = \frac{u\sigma_0}{r^3} 3\sin\omega\cos\omega = -F_i \frac{a^3}{r^3} 3\sin\omega\cos\omega,$$

$$F_n = \frac{u\sigma_0}{r^3} 2\cos\omega = -2F_i \frac{a^3}{r^3}\cos\omega,$$

$$F_t = \frac{u\sigma_0}{r^3}\sin\omega = -F_i \frac{a^3}{r^3}\sin\omega,$$

$$M = \pi a^2 \sigma_0 = \frac{3}{4}\frac{u\sigma_0}{a} = -\frac{3}{4} F_i a^2,$$

$$Q = S\pi\sigma_0 = -S\frac{3}{4}F_i = -3\pi a^2 F_i.$$

159. Sphère conductrice dans un champ uniforme. — Supposons maintenant qu'une sphère ainsi électrisée soit placée dans un champ uniforme, d'intensité φ, parallèle à l'axe des x et soit V_0 la valeur du potentiel dans le plan qui passe par le centre. Si l'on a

$$F_i + \varphi = 0,$$

la force résultante est nulle dans toute la sphère ; le potentiel est donc constant et, si la sphère est conductrice, l'équilibre existe.

Pour obtenir l'état électrique d'une sphère conductrice dans un champ uniforme d'intensité φ, il suffit donc de rem-

placer F_t par $-\varphi$ dans toutes les formules précédentes, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= \frac{3}{4\pi}\varphi,\\
\varpi &= a^3\varphi,\\
V_i &= \varphi r\cos\omega,\\
V_e &= \varphi\frac{a^3}{r^3}\cos\omega,\\
X_e &= \varphi\frac{a^3}{r^3}(3\cos^2\omega - 1),\\
Y_e &= \varphi\frac{a^3}{r^3}3\sin\omega\cos\omega,\\
F_n &= 2\varphi\frac{a^3}{r^3}\cos\omega,\\
F_t &= \varphi\frac{a^3}{r^3}\sin\omega,\\
M &= \frac{3}{4}a^2\varphi,\\
Q &= 3\pi a^2\varphi.
\end{aligned}$$

160. — Si l'on désigne par R le rayon du cercle tracé sur une surface de niveau par lequel passerait le même flux dans le champ primitif, c'est-à-dire du cercle qui comprend toutes les lignes de force dirigées vers la sphère conductrice, on a

$$\begin{gathered}
\pi R^2\varphi = 4\pi M = 3\pi a^2\varphi,\\
R^2 = 3a^2.
\end{gathered}$$

Ce cercle a donc une surface triple du grand cercle de la sphère.

Toutes ces lignes de forces aboutissent normalement à la surface de la sphère et en émanent normalement, sauf toutefois celles qui tombent sur l'équateur; celles-ci font avec la normale un angle de 45°.

En effet, pour un point quelconque, situé à une distance r dans la direction ω, l'angle θ de la force résultante avec le rayon vecteur r est donné par la relation

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\varphi\sin\omega - F_t}{\varphi\cos\omega + F_n} = \operatorname{tang}\omega\,\frac{1-\dfrac{a^3}{r^3}}{1+2\dfrac{a^3}{r^3}}.$$

Cet angle θ est toujours nul quand on fait $r=a$, c'est-à-dire quand le point est sur la sphère. Toutefois, pour les points de l'équateur, l'angle ω est égal à $\frac{\pi}{2}$ et l'expression prend une forme indéterminée.

Supposons que l'angle ω diffère très peu de $\frac{\pi}{2}$, l'angle θ pour un point P (fig. 42) voisin de la surface est

$$\tang\theta = \frac{CQ}{QP} = \frac{a\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}{r-a} = \frac{a \tang\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}{r-a} = \frac{a}{r-a}\cdot\frac{1}{\tang\omega}.$$

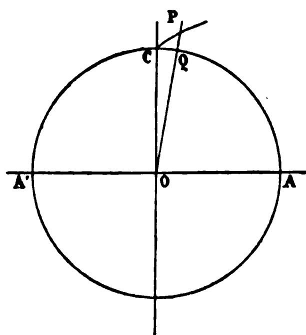


Fig. 42

Multipliant cette équation par la précédente qui est toujours vraie, et remarquant que la différence $r-a$ est très petite, il vient

$$\tang^2\theta = \frac{a}{r-a}\cdot\frac{r^3-a^3}{r^3+2a^3} = \frac{a}{r-a}\cdot\frac{3a^2(r-a)}{r^3+2a^3} = \frac{3a^3}{r^3+2a^3} = 1.$$

Les lignes de force qui touchent la sphère sur l'équateur font donc avec la surface un angle de 45°.

La surface de niveau au potentiel primitif V_0 du centre de la sphère est un plan qui aboutit à l'équateur et se prolonge ensuite par la surface même de la sphère. L'équateur est une ligne singulière de cette surface de niveau.

161. Sphère conductrice non isolée dans un champ uniforme. — Il est facile de passer du cas que nous venons de traiter à celui d'une sphère située dans un champ uniforme et communiquant avec le sol. Il faut, en effet, que le potentiel intérieur qui avait une valeur constante V_0 devienne nul, et il suffit pour cela de superposer à l'état précédent une couche uniforme capable de donner à l'intérieur un potentiel égal et de signe contraire à V_0. Soit $-M'$ la masse de cette couche et $-\sigma'$ sa densité, on aura

$$V_0 = \frac{M'}{a} = \frac{4\pi a^2 \sigma'}{a} = 4\pi a \sigma',$$

d'où

$$\sigma' = \frac{V_0}{4\pi a}.$$

La densité résultante en un point quelconque sera

$$\sigma = \sigma_0 \cos\omega - \sigma' = \frac{3}{4\pi}\varphi \cos\omega - \frac{V_0}{4\pi a},$$

$$4\pi\sigma = 3\varphi \cos\omega - \frac{V_0}{a}.$$

Pour que la densité soit nulle en A, au pôle de la sphère, il faut qu'on ait

$$3\varphi a = V_0.$$

Si on appelle V_1 et V_2 les potentiels primitifs en A′ et A, la force du champ a pour valeur

$$\varphi = \frac{V_2 - V_1}{2a},$$

et le potentiel au centre

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

La condition précédente revient à

$$\frac{3}{2}(V_2 - V_1) = \frac{V_1 + V_2}{2},$$

ou

$$V_2 = 2V_1.$$

Pour que la densité soit nulle en A, il faut donc que les valeurs primitives du potentiel aux deux pôles de la sphère soient dans le rapport de 1 à 2.

Cette densité est négative et, par suite, la surface de la sphère est entièrement négative tant que l'on a $V_2 < 2V_1$.

Dans le cas contraire, la plus grande partie de la surface est encore négative, mais il existe autour du point A une zone plus ou moins étendue d'électricité positive.

162. Sphère diélectrique dans un champ uniforme. — La polarisation uniforme, ou l'électrisation par des couches de glissement, représente également, d'après la théorie de Poisson, l'état d'une sphère diélectrique dans un champ uniforme. Seulement, si nous appelons φ l'intensité du champ, F_i la force intérieure constante due à la couche fictive, la force résultante en chaque point de l'intérieur, au lieu d'être nulle, aura une valeur constante égale à $\varphi + F_i$.

Nous pouvons vérifier qu'en effet la condition relative à l'équilibre des diélectriques est alors satisfaite, c'est-à-dire qu'il y a un rapport constant dans toute l'étendue de la surface entre les composantes normales de la force à l'intérieur et à l'extérieur.

Ce rapport μ, étant donné par la nature du diélectrique, permettra de déterminer la force F_i et, par suite, la distribution de la couche fictive.

Pour un point P pris sur la surface dans une direction ω, la composante normale extérieure est $\varphi \cos\omega + F_n = (\varphi - 2F_i)\cos\omega$, et la composante normale intérieure $(\varphi + F_i)\cos\omega$. Le rapport de ces deux forces

$$\mu = \frac{(\varphi - 2F_i)\cos\omega}{(\varphi + F_i)\cos\omega} = \frac{\varphi - 2F_i}{\varphi + F_i}$$

est donc constant, et on en déduit

$$F_i = -\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\varphi.$$

On voit que le problème est complètement déterminé et que l'état de la sphère est identique à celui d'une sphère conductrice de même rayon située dans un champ uniforme dont l'intensité serait $\varphi \frac{\mu - 1}{\mu + 2}$. On en conclut (**150**)

$$\sigma_0 = \frac{3}{4\pi}\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\varphi.$$

163. — Le flux de force qui sort de la sphère est égal au flux qui la traverse $\pi a^2(\varphi + F_i)$ augmenté du flux $-3\pi a^2 F_i$ qui correspond à chacune des couches superficielles.

On a donc

$$Q = \pi a^2(\varphi + F_i - 3F_i) = \pi a^2(\varphi - 2F_i)$$
$$= \pi a^2 \varphi\left(1 + 2\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\right) = 3\pi a^2 \varphi \frac{\mu}{\mu + 2}.$$

Le cercle de flux équivalent sur les surfaces de niveau primitives aurait un rayon donné par la relation

$$R^2 = 3a^2\frac{\mu}{\mu + 2} = a^2\frac{3}{1 + \frac{2}{\mu}};$$

il est toujours plus grand que celui de la sphère tant que μ est > 1. La force intérieure est

$$\varphi + F_i = \varphi\left(1 - \frac{\mu - 1}{\mu + 2}\right) = \frac{3}{2 + \mu}\varphi;$$

elle est égale à $\frac{3}{4}\varphi$ si $\mu = 2$, ce qui a lieu d'une manière approximative pour la plupart des diélectriques, et devient égale à $\frac{3\varphi}{\mu}$ lorsque μ est très grand.

Au voisinage du pôle A, à l'extérieur, la force est

$$\varphi - 2F_i = \varphi\frac{3\mu}{\mu + 2};$$

elle est égale à $\frac{3}{2}\varphi$ pour $\mu = 2$ et devient 3φ quand μ est très grand. Cette force est alors triple de sa valeur primitive; c'est ce qui a lieu avec les conducteurs.

Dans le cas actuel, les lignes de force extérieures ne sont plus normales à la surface. On vérifierait aisément que les composantes tangentielles sont égales et que le rapport des angles θ et ω (fig. 43) de la normale avec les lignes de force à l'extérieur et à l'intérieur satisfait à la loi de réfraction

$$\tang\theta = \frac{\tang\omega}{\mu}.$$

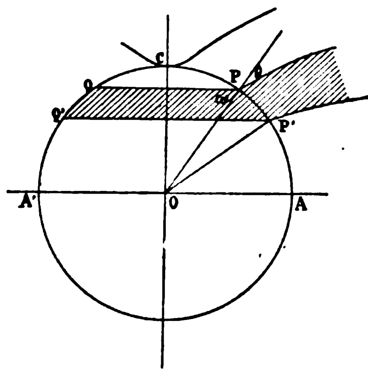


Fig. 43

Pour l'équateur, où $\omega = \frac{\pi}{2}$, cette équation donne aussi $\theta = \frac{\pi}{2}$. Les lignes de force qui touchent la sphère sur l'équateur sont donc tangentes à la surface.

164. Couches sphériques concentriques dans un champ uniforme. — Il est facile de généraliser le problème qui précède et de l'appliquer à une série de couches sphériques concentriques. Soit, en effet, un système de sphères concentriques S_1, S_2, S_3,... (fig. 44) de rayons a_1, a_2, a_3,... et de pouvoirs inducteurs μ_1, μ_2, μ_3,... placées dans un champ uniforme d'intensité φ.

Considérons la sphère intérieure S_1. Si le milieu de pou-

voir inducteur μ_2 qui l'entoure était indéfini et constituait un champ uniforme d'intensité φ_2, cette sphère se recouvrirait d'une couche de glissement M_1, donnant à l'intérieur une force constante F_1 et un champ uniforme $\varphi_1 = \varphi_2 + F_1$; et, pour un point P_1 pris à la surface dans la direction ω, on aurait la relation

$$\mu_1 \varphi_1 \cos\omega = \mu_2(\varphi_2 - 2F_1)\cos\omega,$$

ou

$$\mu_1 \varphi_1 = \mu_2(\varphi_2 - 2F_1). \quad (25)$$

Mais le champ uniforme d'intensité φ_2 situé à l'extérieur de la sphère S_1 est celui qui résulterait pour l'intérieur de la

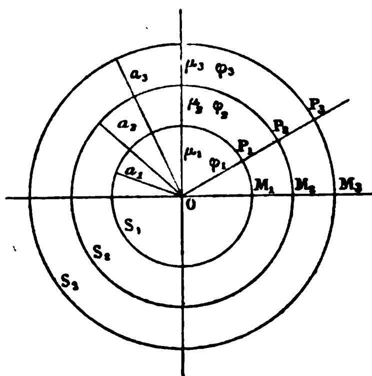


Fig. 44

sphère S_2 d'un champ uniforme extérieur d'intensité φ_3 et de la force intérieure F_2 due à la couche fictive M_2 distribuée sur la surface suivant la même loi, ce qui donnerait

$$\varphi_2 = \varphi_3 + F_2.$$

Pour un point P_2 de cette surface, il y aura à considérer non seulement l'action φ_3 du champ extérieur et celle de la couche M_2, mais aussi l'action de la couche M_1 de la sphère intérieure S_1.

La loi de conservation du flux d'induction donnera entre ces quantités une relation analogue à l'équation (25) et que

nous pouvons écrire immédiatement de la manière suivante, en supprimant le facteur commun $\cos\omega$:

$$\mu_2\left[\varphi_2 - 2F_1\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right] = \mu_3\left[\varphi_3 - 2F_2 - 2F_1\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right],$$

ou

$$(26)\qquad \mu_2\varphi_2 = \mu_3(\varphi_3 - 2F_2) + 2(\mu_2 - \mu_3)F_1\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3.$$

Le même raisonnement s'applique à la surface S_3 ; on devra alors tenir compte, pour un point P_3 de sa surface, de l'intensité φ_4 du champ extérieur et des actions des trois couches intérieures M_3, M_2 et M_1.

On aura ainsi

$$\left[\varphi_3 - 2F_2\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 - 2F_1\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^3\right]\mu_4 = \left[\varphi_4 - 2F_3 - 2F_2\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 - 2F_1\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^3\right]$$

ou

$$(27)\qquad \mu_3\varphi_3 = \mu_4(\varphi_4 - 2F_3) + 2(\mu_3 - \mu_4)\left[F_2\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^3 + F_1\left(\frac{a_1}{a_3}\right)^3\right].$$

La loi des termes est évidente. En joignant ces équations aux identités

$$(28)\qquad \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi_2 + F_1, \\ \varphi_2 = \varphi_3 + F_2, \\ \varphi_3 = \varphi_4 + F_3, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

on pourra déterminer les valeurs de F_1, F_2, F_3... Le problème est donc complètement résolu.

165. — Supposons qu'il n'y ait que deux couches, limitées par les surfaces S_1 et S_2, dans un champ extérieur uniforme d'intensité φ où le diélectrique est de l'air. Il suffit de poser

$$\begin{array}{l} \varphi_3 = \varphi, \\ \mu_3 = 1. \end{array}$$

Les équations (28) donnent alors

$$\varphi_2 = \varphi + F_2,$$
$$\varphi_1 = \varphi + F_2 + F_1.$$

Substituant dans (25) et (26), et posant $\beta = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$, il vient

$$(29)\qquad \begin{aligned} \mu_1(\varphi + F_2 + F_1) &= \mu_2(\varphi + F_2 - 2F_1), \\ \mu_2(\varphi + F_2) &= (\varphi - 2F_2) + 2(\mu_2 - 1)\beta F_1, \end{aligned}$$

équations qui détermineront les forces F_1 et F_2 en fonction des données du problème.

168. — Supposons, en outre, que le noyau intérieur soit aussi de l'air, ce qui reviendra à déterminer l'état d'une couche sphérique; il faudra faire aussi $\mu_1 = 1$. Représentons par μ le pouvoir inducteur spécifique du milieu antérieurement désigné par μ_2, les équations (29) deviendront

$$F_1(1 + 2\mu) = (\mu - 1)(\varphi + F_2),$$
$$F_2(\mu + 2) = (\mu - 1)(2\beta F_1 - \varphi).$$

On en déduit

$$F_1[1 + 2\mu - 2(\mu - 1)\beta] = -3F_2,$$
$$F_1[(1 + 2\mu)(\mu + 2) - 2(\mu - 1)^2\beta] = 3(\mu - 1)\varphi,$$

et, par suite,

$$\frac{F_1}{3(\mu - 1)} = \frac{-F_2}{(\mu - 1)[1 + 2\mu - 2(\mu - 1)\beta]} = \frac{\varphi}{(1 + 2\mu)(\mu + 2) - 2(\mu - 1)^2\beta}.$$

La force intérieure à la surface S_1 est

$$F_i = \varphi_1 = \varphi + F_2 + F_1 = \varphi \frac{9\mu}{(1 + 2\mu)(\mu + 2) - 2(\mu - 1)^2\beta},$$
$$F_i = \frac{\varphi}{1 + \frac{2(\mu - 1)^2}{9\mu}(1 - \beta)}.$$

La force est constante à l'intérieur de S_1, mais elle n'est pas constante entre S_1 et S_2, ni en dehors de S_2. La valeur de la force à l'intérieur de S_1 en une fraction de l'intensité du champ qui serait égale à l'unité pour $\mu = 1$, à zéro pour $\mu = \infty$. Avec les diélectriques ordinaires où le coefficient μ s'écarte peu de 2, cette fraction est toujours très voisine de l'unité; si la couche est conductrice, le coefficient μ peut être considéré comme infini et F_i devient nul.

Nous verrons plus tard l'intérêt que cette question présente au point de vue du magnétisme.

167. — Hypothèse de Poisson sur la constitution des diélectriques. — L'hypothèse de Poisson, reprise par Faraday pour l'électricité, consiste, comme nous l'avons déjà dit (**110**), à supposer le corps diélectrique formé de petites sphères conductrices disséminées dans un milieu isolant.

Les résultats qui précèdent nous permettent d'exposer ici la méthode employée par Poisson pour calculer, au moins d'une manière approchée, les conséquences de son hypothèse.

Considérons une sphère de rayon a_1 et de pouvoir inducteur spécifique μ_1, située dans un champ d'intensité φ_2 et de pouvoir inducteur μ_2; la force intérieure de la couche électrique est, d'après les équations (25) et (28),

$$F_1 = \varphi_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + 2\mu_2},$$

et le potentiel extérieur de cette couche sur un point situé à une distance r est égal à

$$V_e = -F_1 \frac{a_1^3}{r^2} \cos\omega.$$

Supposons qu'une sphère de rayon a renferme un grand nombre de petites sphères de rayon a_1 et admettons avec Poisson que l'électrisation de chacune d'elles n'est pas influencée par l'électrisation des sphères voisines et ne dépend que de l'intensité du champ. Si n est le nombre des petites sphères contenues dans la grande, le potentiel à une distance très

grande par rapport à a aura pour valeur

$$V = nV_e = -F_1 \frac{na_1^3}{r^2}\cos\omega = -\varphi_2 \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+2\mu_2} na_1^3 \frac{\cos\omega}{r^2},$$

ou, en posant $h = \frac{na_1^3}{a^3}$, c'est-à-dire en appelant h le rapport de l'espace occupé par les petites sphères au volume de la sphère totale,

$$V = -\varphi_2 \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+2\mu_2} ha^3 \frac{\cos\omega}{r^2}.$$

Si la sphère était homogène et de pouvoir inducteur μ, le potentiel V′ à la même distance serait

$$V' = -\varphi_2 \frac{\mu_2-\mu}{\mu+2\mu_2} a^3 \frac{\cos\omega}{r^2}.$$

L'effet des deux systèmes est identique si l'on a

$$\frac{\mu_2-\mu}{\mu+2\mu_2} = h\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+2\mu_2},$$

ce qui donne

$$\mu = \mu_2 \frac{\mu_1+2\mu_2-2h(\mu_2-\mu_1)}{\mu_1+2\mu_2+\ h(\mu_2-\mu_1)};$$

cette valeur de μ représente le pouvoir inducteur *apparent* de la sphère constituée comme nous l'avons supposé.

Si on admet que les petites sphères sont conductrices, il faut faire $\mu_1 = \infty$; il reste alors

$$\mu = \mu_2 \frac{1+2h}{1-h}.$$

Si, enfin, le milieu extérieur est l'air, $\mu_2 = 1$ et il vient

$$\mu = \frac{1+2h}{1-h}, \quad \text{ou} \quad h = \frac{\mu-1}{\mu+2}.$$

Pour les diélectriques ordinaires dont le pouvoir inducteur pécifique est voisin de 2, on aurait

$$h = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Ce résultat peut donner une idée du degré d'exactitude que comporte le raisonnement de Poisson.

Dans une sphère conductrice, la force intérieure due aux couches induites est égale à l'action du champ extérieur. L'action extérieure d'une sphère polarisée est très petite par rapport à l'action intérieure, puisque le rapport des forces (158) est au plus égal à $2\left(\frac{a}{r}\right)^3$ et tend vers zéro quand les sphères sont infiniment petites. Mais, si le volume occupé par les sphères conductrices est le quart du volume total, l'action que chacune d'elles exerce sur les voisines n'est plus négligeable par rapport à la force intérieure et le champ se trouve ainsi modifié. Le rapport maximum de la somme des volumes de sphères qui se touchent à l'espace total est égal à $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ ou sensiblement $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Si ce rapport est réduit à $\frac{1}{4}$, la distance des centres de deux sphères voisines est environ égale au diamètre multiplié par $\sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}}}$. L'action exercée par la couche électrique de l'une des sphères au centre de la plus voisine pourrait donc atteindre une fraction de la force intérieure égale à

$$2\left(\frac{a}{2a\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{2}}}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{11}.$$

Il est vrai que si l'action réciproque des sphères tend à augmenter l'électrisation parallèlement à la force du champ, elle tend à la diminuer dans une direction normale, de sorte qu'on peut rester très près de la vérité en admettant, avec Poisson, que cette influence réciproque est négligeable.

168. — Deux masses inégales et de signes contraires. — Soient $+m$ et $-m'$ deux masses de signes contraires, situées en A et A' (fig. 45), à la distance de $2a$, m étant plus grand que m' en valeur absolue; posons

$$\frac{m}{m'}=k^2.$$

L'équation d'une surface de niveau est

$$V=\frac{m}{r}-\frac{m'}{r'}=m'\left(\frac{k^2}{r}-\frac{1}{r'}\right)=\frac{m'}{r}\left(k^2-\frac{r}{r'}\right)=\frac{m}{r'}\left(\frac{r'}{r}-\frac{1}{k^2}\right).$$

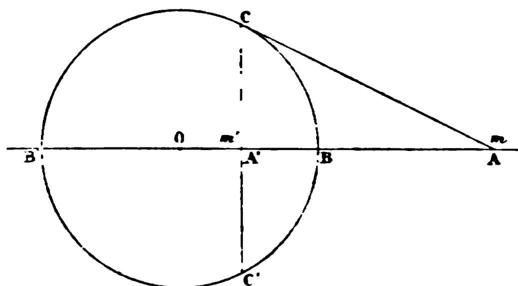


Fig. 45

L'une de ces surfaces correspond au potentiel zéro et a pour équation

$$\frac{m}{r}-\frac{m'}{r'}=0,$$

ou

$$\frac{r}{r'}=\frac{m}{m'}=k^2.$$

C'est une sphère comprenant le point A'; les deux points A et A' sont conjugués par rapport à cette sphère.

Pour déterminer le rayon R et le centre O de la sphère, on se servira des relations

$$k^2=\frac{BA}{BA'}=\frac{B'A}{B'A'}=\frac{R}{OA'}=\frac{OA}{R}.$$

On en déduit aisément, en remarquant que $OA - OA' = 2a$,

$$R = 2a\frac{k^2}{k^2-1},$$

$$OA = 2a\frac{k^2}{k^2-1}, \qquad (30)$$

$$OA' = 2a\frac{1}{k^2-1}.$$

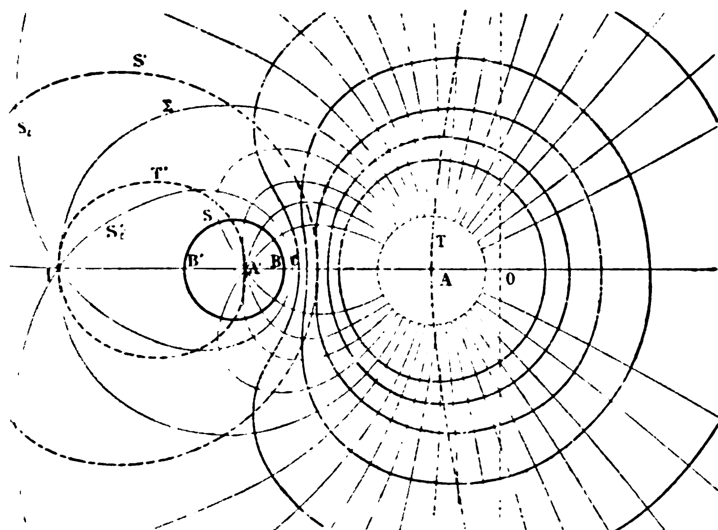


Fig. 46

Les potentiels sont négatifs à l'intérieur de cette sphère et positifs à l'extérieur.

Toutes les surfaces de niveau sont des surfaces fermées à une nappe ou à deux nappes isolées, sauf une seule qui a deux nappes contiguës S_i et S'_i et qui passe par le point I (fig. 46) où la force est nulle. La position de ce point est donnée par l'équation

$$\frac{m}{\overline{IA}^2} = \frac{m'}{\overline{IA'}^2},$$

ou

$$\left(\frac{IA}{IA'}\right)^2 = \frac{m}{m'} = k^2;$$

on a donc

$$\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IA}'}=k.$$

et, par suite,

$$\mathrm{IA}=2a\frac{k}{k-1},$$

$$\mathrm{IA}'=2a\frac{1}{k-1}.$$

La valeur du potentiel en I, et sur toute la surface à deux nappes, est

$$V_i=\frac{m}{2a}\left(\frac{k-1}{k}\right)^2=\frac{m'}{2a}(k-1)^2.$$

Il y a évidemment sur l'axe deux autres points C et C′ pour lesquels le potentiel a la même valeur et qui appartiennent à cette surface. En effet, le potentiel croît de zéro à l'infini de B en A, et décroît de l'infini à zéro, depuis le point A jusqu'à l'infini. Les distances x et x' des points C et C′ au point A sont données par les équations

$$\frac{(k-1)^2}{2a}=\frac{k^2}{x}-\frac{1}{2a-x}=\frac{k^2}{y}-\frac{1}{2a+y}.$$

Toutes les surfaces dont le potentiel est plus grand que V_i entourent seulement le point A; toutes celles dont le potentiel est positif et plus petit que V_i se composent de deux nappes isolées et fermées toutes deux : l'une extérieure au grand lobe de la surface S_i entoure les deux points A et A′; l'autre intérieure au petit lobe S_i' entoure seulement le point A′.

169. — L'équation générale des lignes de force

$$m\cos\omega+m'\cos\omega'=m'+m\cos\theta$$

devient ici

$$m\cos\omega-m'\cos\omega'=-m'+m\cos\theta,$$

ou

$$(31)\qquad \cos\omega'-k^2\cos\omega=1-k^2\cos\theta.$$

L'asymptote, qui correspond à $\omega = \omega'$, est déterminée par l'équation

$$(1 - k^2)\cos\alpha = 1 - k^2\cos\theta;$$

elle passe par le centre de gravité O des deux masses. Ce point est donné par la relation

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}} = \frac{m'}{m} = \frac{1}{k^2}.$$

Pour que l'asymptote soit réelle, il faut que l'on ait $\cos\alpha > -1$, ou

$$\frac{1 - k^2\cos\theta}{1 - k^2} + 1 > 0.$$

La condition

$$\frac{1 - k^2\cos\theta}{1 - k^2} + 1 = 0$$

donne la valeur de θ qui correspond à la ligne de force limite. L'équation de cette ligne de force est donc

$$\cos\omega' - k^2\cos\omega = k^2 - 1;$$

elle limite évidemment le flux $4\pi(m - m')$ émanant du point A et correspond à la valeur de θ donnée par l'équation

$$1 - \cos\theta = \frac{\mathrm{N}}{2\pi m} = \frac{2(m - m')}{m} = 2\left(1 - \frac{1}{k^2}\right),$$

ou

$$\cos\theta = \frac{2}{k^2} - 1.$$

Cette ligne de force Σ passe en outre au point d'équilibre I, comme on le vérifiera facilement.

Pour déterminer la direction de la tangente, reprenons l'équation (11) déjà employée (n° **145**)

$$\frac{r\,d\omega}{\sin\beta} = \frac{r'\,d\omega'}{\sin\beta'}. \tag{11}$$

L'équation (31) donne

$$\sin\omega' d\omega' = k^2 \sin\omega d\omega,$$

ou, en remplaçant les sinus par les côtés opposés qui leur sont proportionnels dans le triangle APA' (fig. 34),

$$r d\omega' = k^2 r' d\omega;$$

on en déduit

$$(32) \qquad \frac{r^2}{\sin\beta} = k^2 \frac{r'^2}{\sin\beta'}.$$

170. — Quand la tangente est horizontale, on a

$$\beta + \omega = \pi,$$
$$\beta' = \omega',$$

ou

$$\sin\beta = \sin\omega,$$
$$\sin\beta' = \sin\omega'.$$

L'équation (11) devient alors

$$\frac{r^2}{\sin\omega} = k^2 \frac{r'^2}{\sin\omega'},$$

ou, en remplaçant les sinus par les côtés opposés,

$$\frac{r}{r'} = k^2 \frac{r'^2}{r},$$

équation qu'on peut écrire

$$\frac{r}{r'} = k^{\frac{2}{3}}.$$

Le lieu des points où la tangente est horizontale est donc une sphère S' comprenant le point A'. Le centre et le rayon de

cette sphère se calculeront par les formules (30) dans lesquelles on remplacera k par $k^{\frac{1}{3}}$.

171. — Lorsque la tangente est verticale, on a

$$\omega+\beta=\frac{\pi}{2},$$

$$\beta'-\omega'=\frac{\pi}{2},$$

ou

$$\sin\beta=\cos\omega.$$
$$\sin\beta'=\cos\omega'.$$

Dans ce cas l'équation (32) devient

$$\frac{r^2}{\cos\omega}=k^2\frac{r'^2}{\cos\omega'};$$

elle représente une courbe formée de deux branches, l'une partant du point A, l'autre du point A′ (fig. 46).

La branche T partant de A est d'abord verticale en ce point. Pour une grande distance, les angles ω et ω' tendent vers l'égalité et l'on a

$$\frac{\cos\omega}{r^2}=\frac{\cos\omega'}{k^2r'^2}=\frac{\cos\omega-\cos\omega'}{r^2-k^2r'^2}=\frac{\sin\omega.\delta.r}{r(r^2-kr^2)}=\frac{2a\sin^2\omega}{r^3(1-k^2)},$$

d'où

$$\frac{\sin^2\omega}{\cos\omega}=\frac{r(1-k^2)^1}{2a}.$$

Le second membre croît jusqu'à l'infini avec r. Donc l'angle ω tend vers $\frac{\pi}{2}$ et la courbe a une asymptote verticale qui passe évidemment par le point O.

La seconde branche est une courbe fermée T′ : elle passe par le point A′ et par le point I.

172. Electrisation d'une sphère sous l'influence d'un point. — D'après les théorèmes établis précédemment (61), nous savons qu'on peut remplacer la masse $-m'$ par un couche égale en équilibre sur l'une quelconque des surfaces de niveau qui

entourent le point A′, y compris la nappe S'_i de la surface à deux nappes. De même, on pourra remplacer la masse m par une couche égale sur l'une des surfaces de niveau qui entourent A, y compris la surface S_i. Enfin, toujours pour les points extérieurs, on pourra remplacer les deux masses m et $-m'$ par une masse $m-m'$ sur une des surfaces qui entourent les deux points, y compris encore la nappe S_i.

Si en particulier, nous considérons la sphère S de potentiel zéro, qui entoure le point A′, nous pouvons remplacer $-m'$ par une masse égale en équilibre sur la sphère. Rien ne sera changé pour les points extérieurs ; mais pour les points intérieurs le potentiel sera constant et égal à la valeur qu'il a

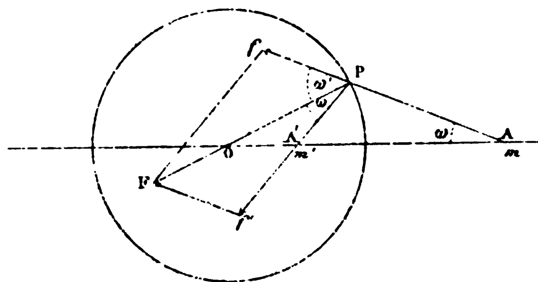


Fig. 47

sur cette surface, c'est-à-dire nul. Pour les points intérieurs à la surface S, on peut encore remplacer la masse m par une masse $+m'$ en équilibre sur cette surface et alors le potentiel sera nul partout à l'extérieur.

Le premier cas correspond à l'électrisation d'une sphère non isolée soumise à l'influence d'une masse extérieure ; le second donne l'influence d'une masse électrique sur une surface sphérique non isolée qui l'entoure.

La densité σ de la couche en chaque point doit satisfaire à la relation

$$F = 4\pi\sigma.$$

Au point P, sur la surface (fig. 47), la force est dirigée suivant PO ; c'est la résultante des forces f et f', l'une émanant de

A et l'autre dirigée vers A'. Le triangle formé par les trois forces F, f et f' est semblable au triangle APA'; on a donc

$$\frac{F}{AA'}=\frac{f}{r'}=\frac{f'}{r},$$

et, par suite,

$$F=2a\frac{f}{r'}=2a\frac{m}{r^2r'}=2ak^2\frac{m}{r^3}=\frac{2a}{k^2}\cdot\frac{m'}{r'^3}.$$

Il en résulte

$$\sigma=-\frac{2ak^2}{4\pi}\cdot\frac{m}{r^3}=-\frac{2a}{4\pi k^2}\cdot\frac{m'}{r'^3}.$$

Ainsi, sur la surface S, la force et la densité en un point sont en raison inverse du cube de sa distance, soit au point A, soit au point A'.

Cette densité est positive si l'on remplace la masse m par une couche répandue sur la surface sphérique S; ce cas est celui de l'influence d'une masse $-m'$ placée dans l'intérieur d'une surface sphérique non isolée.

La densité est négative si l'on substitue au contraire l'action de cette couche à celle de la masse $-m'$, ce qui correspond au problème d'une sphère S non isolée soumise à l'influence de la masse m en A.

Dans ces deux cas, la sphère est donnée ainsi que la position et la grandeur de l'une des masses.

Si l'on connaît la masse m, le rayon de la sphère R et la distance $AO=d$, on en déduit immédiatement

$$k^2=\frac{d}{R},\quad m'=-m\frac{R}{d},\quad 2ad=d^2-R^2,$$

et, par suite,

$$\sigma=-\frac{d^2-R^2}{4\pi r}\cdot\frac{m}{r^3}.$$

172. — Si, après avoir isolé la sphère, on superpose à la couche $-m$ une couche quelconque M uniforme, il y a encore

équilibre, et le potentiel de la sphère, qui était nul, devient

$$V_1 = \frac{M}{R}.$$

Si l'on fait $M = m'$, la charge totale de la sphère est nulle et son potentiel est

$$V_0 = \frac{m'}{R}.$$

C'est le cas d'une sphère isolée, primitivement neutre, électrisée sous l'influence d'un point extérieur. Comme la masse est nulle, le potentiel au centre ne dépend que de la masse extérieure. On doit donc avoir

$$V_0 = \frac{m'}{R} = \frac{m}{d}.$$

La densité de cette couche nouvelle étant

$$\sigma_0 = \frac{m'}{4\pi R^2} = \frac{m}{4\pi R d},$$

la densité résultante est

$$\sigma_0 + \sigma = \frac{m}{4\pi R d} - \frac{d^2 - R^2}{4\pi R} \cdot \frac{m}{r^3} = \frac{m}{4\pi R}\left[\frac{1}{d} - \frac{d^2 - R^2}{r^3}\right].$$

La densité sera nulle pour tous les points du petit cercle perpendiculaire à l'axe défini par l'équation

$$r^3 = d(d^2 - R^2).$$

Le plan de ce petit cercle coupe l'axe OA à gauche du point A' puisque l'on a $r < \sqrt{d^2 - R^2}$. C'est la *ligne neutre* qui sépare la zone positive de la zone négative. C'est une ligne d'équilibre, la force et la densité y sont nulles. Elle est l'intersection, par la sphère, de la surface de niveau de potentiel

$V_o = \frac{m}{d}$; on sait d'ailleurs (18) que les deux surfaces se coupent à angle droit.

La densité serait nulle sur le petit cercle de contact du cône tangent à la sphère et ayant son sommet au point A, cercle dont le plan passe par le point A', si l'on avait

$$\frac{M}{4\pi R^2} = \frac{d^2 - R^2}{4\pi R} \cdot \frac{m}{(d^2 - R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m}{4\pi R\sqrt{d^2 - R^2}},$$

et, par suite,

$$\frac{M}{m} = \frac{R}{\sqrt{d^2 - R^2}}.$$

174. Images par rapport à une sphère. — Pour tous les points extérieurs, l'action de la sphère S non isolée et électrisée sous l'influence de la masse m peut être remplacée par celle d'une masse $-m' = -\frac{m}{k}$, placée en A'. De même, la surface S' non isolée et soumise à l'influence de $-m'$ équivaut, pour tous les points intérieurs, à la masse $m = km'$ placée en A.

Cette propriété est analogue à celle que nous avons déjà constatée pour le plan (148). La masse $-m'$ en A' est l'image de la masse extérieure m par rapport à la surface de la sphère, et l'image de la masse $-m'$ par rapport à cette même surface est une masse plus grande $m = km'$ située en A.

175. Image d'un système quelconque. — Le principe des images par rapport à une sphère peut être étendu à un système quelconque, par exemple à une couche électrisée. En effet, chaque élément du système développe par induction sur la sphère une couche dont l'action sur les points extérieurs est identique à celle de l'image correspondante. Chacune de ces couches étant en équilibre, leur superposition sera un état d'équilibre, et l'action résultante sera égale à l'action résultante de toutes les images. L'ensemble de ces images formera un système qui sera l'image par rapport à la sphère du système donné. Si le système donné est une surface Σ, l'image sera une surface Σ' conjuguée à la première.

176. Action réciproque de deux sphères. — Le principe des images combiné à la méthode de Murphy (**86**) permet de résoudre d'une manière complète le problème très important de l'action réciproque de deux sphères. Soient S_a et S_a les deux sphères (fig. 48), R et R′ leurs rayons. La méthode consiste, comme on sait, à déterminer une série de couches successives de la manière suivante. On met sur le conducteur S_a une couche capable de donner un potentiel 1 ; c'est ici une couche uniforme de masse R. Cette couche agit à l'extérieur comme si elle était concentrée en A. On la fixe et on détermine la couche induite sur la surface S_b de la seconde sphère non isolée, ce qui revient à déterminer l'image A′ par rapport à

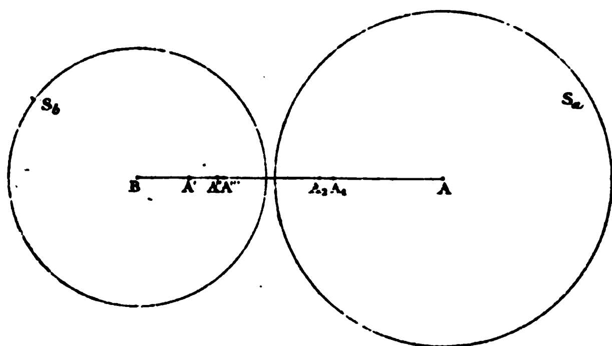


Fig. 48

S_b d'une masse + R en A. On fixe ensuite la couche équivalente à A′ et on détermine son influence sur la sphère S_a non isolée, c'est-à-dire la nouvelle image A_1 de A′, et ainsi de suite. On répétera la même opération en commençant par la sphère S_b et on multipliera par des coefficients convenables toutes les masses ainsi déterminées. Chacune des masses et des densités pouvant être calculée exactement, le problème de distribution est résolu d'une manière complète.

Quant à la force qui s'exerce entre les deux sphères, c'est la résultante des actions exercées par chacune des masses comprises dans l'une des sphères sur toutes les masses renfermées dans la seconde.

Le calcul ne présente pas de difficultés théoriques, mais il

est en réalité très pénible. Sir W. Thomson l'a effectué dans le cas de deux sphères de même rayon lorsque la distance des centres varie de 2R et 4R, c'est-à-dire quand la distance des surfaces est comprise entre o et le diamètre d'une des sphères.

Dans le cas actuel, en appelant R le rayon commun des sphères A et B, U et V les potentiels, cR la distance des centres, M et N les charges respectives, on a, en désignant par I, J, a et b des coefficients qui dépendent de c,

$$\begin{aligned} M &= R(IU - JV), \\ N &= R(IV - JU), \\ F &= 2bUV - a(U^2 + V^2), \end{aligned}$$

expressions analogues à celles que donne la méthode de Murphy (87) pour des corps quelconques.

Si l'on veut exprimer la force et le potentiel en fonction des masses, on obtient

$$\begin{aligned} RU &= \frac{I}{I^2 - J^2} M + \frac{J}{I^2 - J^2} N, \\ RV &= \frac{I}{I^2 - J^2} N + \frac{J}{I^2 - J^2} M, \\ R^2F &= 2\beta MN - \alpha(M^2 + N^2), \\ \alpha &= \frac{a(I^2 + J^2) - 2bIJ}{(I^2 - J^2)^2}, \\ \beta &= \frac{b(I^2 + J^2) - 2aIJ}{(I^2 - J^2)^2}. \end{aligned}$$

Si les charges M et N sont égales, il vient

$$\begin{aligned} M &= RV(I - J), \\ F &= 2(b - a)V^2, \\ RV &= \frac{M}{I - J}. \\ R^2F &= 2(\beta - \alpha)M^2. \end{aligned}$$

177. — Comme ces formules n'ont été calculées que jus-

qu'à $c=4$, il est utile de voir comment on peut les remplacer pour des distances plus grandes.

Supposons que l'action des deux sphères soit la même que si les masses étaient respectivement concentrées aux centres, et que le potentiel de chacune d'elles soit égal à celui que l'on obtiendrait pour le centre en remplaçant la sphère voisine par une masse égale située au centre. On aura ainsi

$$U=\frac{M}{R}+\frac{N}{cR},$$
$$V=\frac{N}{R}+\frac{M}{cR},$$
$$F=\frac{MN}{c^2R^2},$$
$$F=\frac{c^2-1}{(c^2+1)^2}UV-\frac{c}{(c^2-1)^2}(U^2+V^2);$$

et, pour des charges égales,

$$RV=M\left(1+\frac{1}{c}\right)=M\frac{c+1}{c},$$
$$R^2F=\frac{M^2}{c^2},$$
$$F=\frac{V^2}{(c+1)^2}.$$

Si l'on fait $c=4$, les formules de sir W. Thomson donnent

$$1-J=0,80258,$$
$$2(\beta-\alpha)=0,05846,$$
$$2(b-a)=0,03766.$$

Les valeurs correspondantes dans la formule approchée sont

$$\frac{c}{c+1}=\frac{4}{5}=0,80,$$
$$\frac{1}{c^2}=\frac{1}{16}=0,0625,$$
$$\frac{1}{(c+1)^2}=\frac{1}{25}=0,04.$$

Ainsi, lorsque la distance des surfaces est égale au diamètre de l'une des sphères et les charges égales, les formules approchées donnent les potentiels en fonction des masses, la valeur de la force en fonction des masses, et la force en fonction des potentiels avec un degré d'approximation qui est, pour ces différentes quantités respectivement, $\frac{1}{300}$, $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{17}$. Comme les erreurs relatives atteignent déjà $\frac{1}{12}$ lorsque $c=3,8$, on voit qu'elles diminueraient très rapidement pour des distances plus grandes.

On peut donc considérer en particulier, comme parfaitement rigoureuse, la méthode employée par Coulomb pour déterminer l'action de deux masses électrisées, et la balance de Coulomb pourra donner des résultats très exacts dans la mesure des potentiels, avec les formules approchées, si l'on a soin seulement que la distance des surfaces des sphères dépasse sensiblement le diamètre de l'une d'elles. On devra toutefois, pour l'évaluation des potentiels au moyen de la balance, prendre des précautions particulières afin d'éliminer ou de calculer l'influence des parois de la cage.

178. Mouvements des petits corps dans un champ électrique. — Nous avons vu (**162**) qu'une sphère de rayon a, placée dans un champ uniforme où la force est φ, s'électrise de telle manière que l'action intérieure de la couche formée est

$$F_i = -\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\varphi = -h\varphi.$$

Ce coefficient h est égal à $\frac{1}{4}$ pour les diélectriques ordinaires dont le pouvoir inducteur spécifique est 2, et il devient égal à l'unité pour les conducteurs.

On en déduit (**159**)

$$\sigma_0 = \frac{3h}{4\pi}\varphi$$

$$\varpi = u\sigma_0 = u\frac{3h}{4\pi}\varphi = u\mathrm{K}\varphi.$$

180. — *Dans un champ électrique variable, la force ne peut être un maximum en aucun point situé en dehors des masses agissantes.*

Ce théorème est une conséquence directe de la démonstration qui précède.

Nous avons vu en effet, d'après le théorème d'Earnshaw (**62**), qu'un corps électrisé ne peut être en équilibre stable dans un champ variable. Comme une sphère infiniment petite ne peut être en équilibre stable qu'aux points où la valeur de φ^2 est un maximum absolu, c'est-à-dire où la valeur de φ est maximum en valeur absolue, il en résulte que cette circonstance ne peut se présenter pour aucun point situé en dehors des masses agissantes.

181. — Le même raisonnement s'applique au mouvement d'un corps très petit de forme quelconque, si l'on néglige les effets de rotation, c'est-à-dire si l'on admet que le corps conserve toujours la même direction par rapport aux lignes de force. Ce corps, en effet, s'électrise proportionnellement à la force du champ au point où il est placé et la variation d'énergie est proportionnelle à la variation du carré de la force.

Indépendamment de ce mouvement de transport, un corps non sphérique tournera sur lui-même en chaque point de manière que, pour un équilibre stable autour de son centre de gravité, l'énergie électrique soit minimum et l'électrisation maximum.

Tel est, d'après sir W. Thomson, le sens véritable des attractions produites sur les corps légers de petites dimensions dans un champ électrique, au moins tant qu'ils n'ont pas été électrisés directement par contact. Ces corps, conducteurs ou non, se déplacent vers les points où la force est maximum en valeur absolue et, s'ils sont abandonnés à eux-mêmes, ils finiront par aboutir aux surfaces électrisées. S'ils étaient mobiles dans un milieu où une résistance étrangère maintiendrait la vitesse très petite, ils marcheraient vers les corps électrisés en suivant, non pas une ligne de force, mais une ligne de variation maximum de la force ; dans certains cas, où le corps est soumis à des liaisons, ce mouvement peut même se faire perpendiculairement à la force.

Le corps est en équilibre aux points pour lesquels on a

$$d\varphi^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi d\varphi = 0.$$

Cette condition peut être réalisée de deux manières

$$\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad d\varphi = 0.$$

Il y a donc équilibre quand la force est nulle, maximum ou minimum, ou stationnaire. Il y a équilibre en particulier dans un champ uniforme, ce qui était évident *à priori*. L'équilibre est alors indifférent ; il est stable aux maxima de force, instable aux minima et aux points où la force est nulle.

182. Direction d'une aiguille diélectrique dans un champ variable. — Imaginons que sur une sphère chargée, comme nous l'avons toujours supposé, par des couches de glissement, on fasse agir une force F constante de grandeur et de direction faisant avec l'axe d'électrisation l'angle θ ; le moment du couple produit par cette force sera

$$Fm.\delta \cos\theta = F\varpi \cos\theta.$$

Le moment électrique ϖ est donc le moment du couple que subirait cette sphère dans un champ égal à l'unité dont la force serait perpendiculaire à l'axe d'électrisation.

Si l'on adopte l'idée de Poisson et de Faraday sur la constitution des diélectriques et qu'on les considère comme formés de sphères conductrices disséminées dans un milieu isolant ; si on admet, en outre, que l'électrisation de chacune d'elles n'est pas modifiée par les voisines, le moment électrique d'un corps de forme quelconque dans un champ uniforme est, en appelant U le volume du diélectrique, n le nombre des sphères qu'il renferme et u le volume de chacune d'elles,

$$\varpi = nu\frac{3}{4\pi}\varphi = \frac{nu}{U}U\frac{3}{4\pi}\varphi = U\frac{3h}{4\pi}\varphi = UK\varphi.$$

L'expression de ce moment est donc la même que pour une sphère homogène.

Avec cette hypothèse, un corps de forme quelconque dans un champ uniforme serait aussi en équilibre par rapport à son centre de gravité, quelle que fût sa direction. En effet, tous les éléments de volume s'électrisent parallèlement à la force du champ et le couple de rotation, étant nul sur chacun d'eux, est nul sur l'ensemble.

Dans un champ variable, au contraire, un corps très petit fixé par son centre de gravité tend à prendre une certaine direction. Chaque élément de volume du n'étant soumis qu'à la force du champ tend à se porter vers les points où la force augmente et les composantes de la force qu'il subit sont

$$X = \frac{K\,du}{2} \frac{\partial \varphi^2}{\partial x},$$
$$Y = \frac{K\,du}{2} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y},$$
$$Z = \frac{K\,du}{2} \frac{\partial \varphi^2}{\partial z}.$$

183. — Considérons une courte aiguille infiniment mince et soit φ_0 la force du champ au centre de gravité O de l'aiguille. Prenons la direction de la force pour axe des x; supposons que l'aiguille puisse tourner autour de l'axe des z, et qu'elle fasse l'angle θ avec φ_0.

Pour l'élément de volume du à une distance a du centre et dont les coordonnées sont x et y, la composante φ de la force parallèle au plan aura une expression de la forme

$$\varphi^2 = \varphi^2_0 + Ax + By.$$

Les composantes X et Y de la force seront

$$X = \frac{K\,du}{2} A,$$
$$Y = \frac{K\,du}{2} B.$$

La composante tangentielle au cercle que décrit l'élément de volume du est

$$T = X\sin\theta - Y\cos\theta = \frac{K du}{2}(A\sin\theta - B\cos\theta).$$

La position d'équilibre correspond à la condition

$$A\sin\theta - B\cos\theta = 0, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{B}{A},$$

c'est-à-dire à la direction suivant laquelle la variation de la force est maximum.

Lorsque cet élément est dévié d'un angle $d\theta$ de sa position d'équilibre, la composante tangentielle est

$$dT = \frac{K du}{2}(A\cos\theta + B\sin\theta)\, d\theta,$$

l'angle θ étant déterminé par la condition d'équilibre, d'où l'on déduit

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

On a donc

$$dT = \frac{K du}{2}\sqrt{A^2 + B^2}\, d\theta.$$

Pour l'aiguille entière, le moment de la résultante par rapport à l'axe sera

$$\int a\, dT = \frac{K}{2}\int a\, du\sqrt{A^2 + B^2}\, d\theta.$$

En appelant ρ la densité de la substance considérée, la durée t des oscillations infiniment petites est donnée par l'équation

$$t^2 = \pi^2 \frac{\rho\int a^2 du}{\frac{K}{2}\int a\, du\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Si l'aiguille est rectiligne et de longueur $2l$, on a

$$\frac{\int a^2 du}{\int a du} = \frac{2}{3} l,$$

ce qui donne finalement

$$t^2 = \frac{4}{3} \pi^2 \frac{\rho l}{K\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ainsi, dans un champ variable, une aiguille diélectrique pouvant tourner librement autour de son centre de gravité se dirige, non suivant la ligne de force, mais suivant la ligne de plus grande variation de la force; le carré de la durée des oscillations n'est pas simplement en raison inverse de la force du champ, puisqu'il dépend des coefficients de variation, et il est proportionnel, toutes choses égales, à la longueur de l'aiguille.

184. — Le phénomène est particulièrement utile à considérer lorsque le champ est symétrique par rapport au point où se trouve l'aiguille. Supposons, par exemple, que l'aiguille soit placée au milieu O de la distance AA′ (fig. 34) de deux masses égales et de signes contraires, et qu'elle puisse osciller autour d'une droite perpendiculaire à AA′. Dans le plan d'oscillation, la force au point O est un minimum pour la direction A′A ou Ox et un maximum pour une direction perpendiculaire Oy. Pour un point voisin de O, on peut donc écrire

$$\varphi^2 = \varphi_0^2 + Ax^2 - By^2.$$

Les composantes de la force qui s'exerce sur l'élément du sont

$$X = K du A x = K du A a \cos\theta,$$
$$Y = -K du B y = -K du B a \sin\theta,$$

et la composante tangentielle

$$T = aKdu(A+B)\sin\theta\cos\theta.$$

La condition d'équilibre est donc

$$\sin\theta\cos\theta = 0,$$

ce qui donne deux directions, $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, la première correspondant à un équilibre stable, et la seconde à un équilibre instable.

Pour une déviation très petite $d\theta$ à partir de la position d'équilibre stable, la composante tangentielle est

$$dT = aKdu(A+B)d\theta.$$

Si cet élément de volume est seul, la durée des oscillations est donnée par la formule

$$t^2 = \pi^2 \frac{a^2 \rho du}{aKdu(A+B)a} = \pi^2 \frac{\rho}{K} \frac{1}{A+B};$$

on voit qu'elle est indépendante de a et ne dépend que de la densité de la matière considérée, de sa susceptibilité électrique et de la loi de la variation du champ.

Si on assemble sur une droite une série de particules semblables et qu'on suppose qu'elles n'exercent aucune influence les unes sur les autres, chacune d'elles se comportera comme si elle était seule, et l'oscillation de l'aiguille entière se fera dans le même temps que chacune de ses parties; la durée de l'oscillation d'une aiguille pour l'état du champ considéré est donc indépendante de sa longueur.

185. Action d'un champ sur une aiguille conductrice. — Un corps conducteur se comporte d'une manière toute différente. Considérons, par exemple, une aiguille infiniment petite, afin que l'électrisation puisse être supposée identique à celle qui le produirait dans un champ uniforme.

L'aiguille est en équilibre dans une direction normale à la ligne de force, mais il est évident qu'alors l'électrisation est minimum et que l'équilibre est instable.

Lorsque l'aiguille est oblique à la force du champ, les deux couches électriques positive et négative sont symétriques par rapport au centre, et l'action du champ produit évidemment un couple qui tend à amener l'aiguille dans la direction de la force.

La loi de distribution est indépendante de la force du champ et chacune des couches est proportionnelle à cette force. Par suite, le moment du couple qui agit sur l'aiguille, pour une déviation déterminée de la position d'équilibre, est proportionnel au carré de la force φ. Enfin la durée des oscillations est en raison inverse de la force et l'on peut écrire

$$t = \frac{A^1}{\varphi},$$

la constante A dépendant du rapport des dimensions longitudinale et transversale de l'aiguille.

CHAPITRE HUITIÈME

SOURCES D'ÉLECTRICITÉ

186. Découverte de Volta. — Nous avons déjà signalé (9) la propriété importante découverte par Volta que deux conducteurs et, plus généralement, deux corps quelconques mis en contact prennent, de part et d'autre de la surface de contact, des états électriques différents.

S'il s'agit de deux conducteurs de natures différentes en contact et en équilibre électrique, le potentiel est constant sur chacun d'eux, mais il éprouve un changement brusque de part et d'autre de la surface de séparation.

Nous n'avons pas à rappeler ici toutes les expériences qui ont permis d'établir cette loi capitale pour la science; nous indiquerons seulement la suivante qui servira à bien préciser les conditions du phénomène.

Si deux plateaux, l'un de zinc et l'autre de cuivre, tenus par des manches isolants, primitivement à l'état neutre et à la même température, sont mis en contact par des surfaces parallèles, puis séparés l'un de l'autre, on reconnaît que chacun d'eux est électrisé, le zinc positivement, le cuivre négativement. La charge électrique de chacun des plateaux est proportionnelle, toutes choses égales d'ailleurs, à l'étendue des surfaces en contact.

Tout se passe comme si les plateaux formaient les armatures d'un condensateur entre lesquelles existerait une différence de potentiel déterminée, les couches électriques correspondantes étant situées respectivement dans les deux métaux, de

part et d'autre de la surface de séparation et à une distance très petite, de sorte que la capacité du système est simplement proportionnelle à l'étendue des surfaces en regard.

187. Force électromotrice de contact. — Si l'on désigne par V_1 et V_2 les potentiels du zinc et du cuivre, par δV leur différence $V_1 - V_2$ ou *la force électromotrice de contact* et par C la capacité du condensateur formé au moment du contact, la charge des plateaux sera

$$m = C(V_1 - V_2) = C\delta V.$$

L'ensemble des plateaux peut d'ailleurs recevoir une charge électrique commune M qui porte le zinc, par exemple, à un potentiel quelconque V. Dans ce cas, la même différence de potentiel δV se maintient à la surface de contact ; lorsque les plateaux sont séparés, la charge de chacun d'eux se compose de la charge $\pm m$ due à la différence de potentiel de contact et d'une partie de la charge commune M, qui s'est partagée entre eux suivant les lois régulières de la distribution.

L'expérience présente de grandes difficultés quand on veut déduire la différence des potentiels de la grandeur des charges, parce que la distance réelle des plateaux dépend du degré du poli des surfaces ; le contact n'a lieu le plus souvent que par un petit nombre de points et la capacité du système peut varier entre d'assez grandes limites.

On obtient des résultats plus réguliers en maintenant les plateaux parallèlement entre eux à une certaine distance e et en les réunissant par un fil extérieur de cuivre ou de zinc. La différence de potentiel δV produite au point de contact se maintient sur toute l'étendue des deux plateaux ; la distance des couches correspondantes est égale sensiblement à l'épaisseur du diélectrique qui les sépare, et la capacité du système est en raison inverse de cette épaisseur. Si, après avoir supprimé le contact extérieur, on éloigne les plateaux l'un de l'autre, la charge de chacun d'eux est, en appelant S l'étendue des surfaces en regard,

$$m = \frac{S}{4\pi e}\delta V.$$

Cette expérience permettra donc de déterminer la valeur absolue de δV. Dans tous les cas, si l'on maintient constante la distance e des plateaux et qu'on opère avec des métaux différents on pourra mesurer les rapports des forces électromotrices de contact.

En réalité, ces expériences sont très délicates parce que les plus légères modifications dans l'état des surfaces altèrent les résultats. La nature même du gaz qui constitue le diélectrique paraît avoir une petite influence, soit parce que la couche de gaz adhérente au métal en change les propriétés physiques, soit qu'il y ait en même temps formation d'un composé chimique particulier.

188. Lois de Volta. — Loi du contact. — Quoi qu'il en soit, les idées de Volta ont été confirmées par tous les progrès accomplis en électricité et l'on peut énoncer la loi suivante, comme *loi du contact :*

Entre deux corps en contact, à la même température, il s'établit une différence de potentiel finie, qui dépend de leur nature, et qui est absolument indépendante de leurs dimensions, de leur forme, de l'étendue des surfaces de contact et de la valeur absolue du potentiel sur chacun d'eux.

Volta caractérisait cette propriété en disant qu'il existe entre les deux corps une *tension de contact*, mais la manière dont il concevait le phénomène est parfaitement concordante avec l'idée d'une différence de potentiel.

Nous représenterons cette différence de potentiel caractéristique ou force électromotrice de contact de deux métaux A et B par le symbole A|B, la première lettre désignant le métal dont le potentiel est le plus élevé. On aura donc

$$\delta V - V_a - V_b = A|B.$$

Nous pouvons ajouter de suite que cette différence est fonction de la température, et que le contact de deux corps de nature identique, mais à des températures différentes, donne également naissance à une force électromotrice.

Dans toutes les questions relatives à l'équilibre électrique des conducteurs, nous avons négligé, comme on le voit, les

forces électromotrices relatives au contact des différents conducteurs. Tous les calculs supposent donc que les conducteurs sont identiques et à la même température et les résultats doivent être modifiés en tenant compte de cette nouvelle circonstance, à moins qu'il ne s'agisse de potentiels très élevés, auquel cas les effets de contact sont négligeables.

189. Loi des contacts successifs. — Après avoir constaté le fait fondamental de la force électromotrice de contact, Volta a comparé entre eux les résultats fournis par des métaux différents et établi par expérience une seconde loi, dite *loi des contacts successifs*, qu'on peut énoncer ainsi :

Lorsque plusieurs métaux à la même température sont soudés les uns aux autres de manière à former une chaîne continue, la différence des potentiels des métaux extrêmes est la même que si ces deux métaux étaient directement en contact.

Soient A, B, C ..... L, M les métaux constituant la chaîne; cette loi, avec les symboles adoptés plus haut, est représentée par la formule suivante

$$A|B + B|C \cdots\cdots + L|M = A|M.$$

On a d'ailleurs identiquement

$$A|M = -M|A.$$

En faisant passer tous les termes dans le premier membre, l'équation devient donc

$$A|B + B|C + \cdots\cdots + L|M + M|A = 0,$$

ce qui revient à dire que *les deux extrémités de toute chaîne terminée par des métaux identiques sont au même potentiel.*

Cette proposition importante est une conséquence nécessaire du principe de la conservation de l'énergie. Si les métaux extrêmes A et A', de nature identique, pouvaient être maintenus à des potentiels différents par l'effet des contacts intermédiaires, on pourrait, en les joignant par un conducteur de même nature, obtenir dans le conducteur extérieur et dans

la chaîne des métaux intermédiaires une décharge continue, c'est-à-dire un flux permanent d'électricité. Ce transport d'électricité, analogue à une succession de décharges, aurait pour conséquence nécessaire la production de phénomènes calorifiques, c'est-à-dire d'énergie, ce qui serait la réalisation du mouvement perpétuel.

Si l'on suppose même que le dégagement de chaleur en certains points du circuit corresponde à une absorption en d'autres points, il y aurait transport de chaleur des points les plus froids aux points les plus chauds, sans travail correspondant. Ce résultat est incompatible avec le principe de Carnot, qui paraît aussi bien établi dans la science que l'impossibilité du mouvement perpétuel.

190. Exceptions à la loi des contacts successifs. — Piles électriques. — Volta a constaté que la loi des tensions est quelquefois en défaut. Remarquons, en effet, qu'elle ne paraît nécessaire que s'il n'existe aucune source d'énergie dans le circuit; mais si celui-ci renferme des sources d'énergie d'une nature quelconque, par exemple des corps pouvant donner lieu à des réactions exothermiques corrélatives du passage de l'électricité, l'énergie fournie par ces réactions pourra subvenir à l'entretien d'un courant permanent.

Sans avoir sur ce point des idées aussi précises (il ne désespérait pas de rencontrer des métaux ne satisfaisant pas à la loi), Volta avait été conduit à partager les corps en deux grandes classes. La première renferme ceux qui obéissent à la loi des tensions : elle comprend tous les métaux et un certain nombre de solides. La seconde renferme tous ceux qui n'obéissent pas à cette même loi : à cette classe appartiennent la plupart des liquides et des dissolutions. En associant des corps de la première classe à des corps de la seconde, on peut constituer une chaîne dont les deux extrémités, quoique formées par un même métal, présentent une différence finie de potentiel.

L'expérience montre que, dans ce cas encore, la loi fondamentale de Volta est vérifiée, c'est-à-dire que la force électromotrice correspondant à chacun des contacts est, pour une même température, une quantité constante, indépendante des autres corps qui constituent la chaîne; et la différence de

potentiel qui existe entre les deux extrémités de cette chaîne est la somme algébrique de toutes les forces électromotrices relatives à chacun des contacts.

Quand on joint par un conducteur ces deux extrémités, on n'introduit pas de nouvelles forces électromotrices de contact; un flux permanent d'électricité s'établit dans le circuit, où il est entretenu par l'énergie des actions chimiques. Tel est le principe des *piles électriques*.

191. Conséquences relatives à la distance des atômes. — Lorsque deux métaux sont en contact, l'existence d'une force électromotrice implique la formation de deux couches électriques de signes contraires séparées par une distance finie, et ces couches doivent être localisées respectivement dans les deux métaux. On pourrait déterminer l'intervalle des couches, si l'on connaît la force électromotrice, en mesurant la charge absolue qui reste sur deux plateaux quand on les sépare après les avoir mis en contact, car on a, en désignant simplement par V la force électromotrice,

$$e = \frac{S}{4\pi} \cdot \frac{V}{m}.$$

Sous cette forme l'expérience est à peu près impossible à réaliser, car les charges que conservent les plateaux dépendent seulement de la capacité du système au moment où la séparation devient définitive, et cette capacité n'est, en général, qu'une fraction très petite de la capacité primitive, parce que le contact ne peut pas être rompu simultanément dans toute l'étendue de la surface.

Toutefois sir W. Thomson a pu, par une suite de raisonnements ingénieux, indiquer quelle devait être la limite inférieure de la distance de deux couches électriques.

L'énergie électrique du système des deux lames en contact a pour expression

$$W = \frac{1}{2} m V = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{S V^2}{8 \pi e},$$

et cette énergie représente le travail nécessaire pour séparer

les deux plateaux. On peut encore vérifier cette conséquence d'une autre manière. En appelant σ la densité électrique de chacune des couches, on a

$$4\pi\sigma = \frac{V}{e},$$

et la force qui agit sur l'une des surfaces est

$$F = 2\pi\sigma^2 S = \frac{V^2}{8\pi e^2}.$$

Pour écarter les plateaux à une grande distance, il faudra dépenser le travail

$$T = -\int F de = -\frac{SV^2}{8\pi}\int_e^{\infty}\frac{de}{e^2} = \frac{SV^2}{8\pi e}.$$

L'énergie électrique fournie au système au moment du contact est empruntée à l'énergie potentielle primitive des deux plateaux, et on ne peut admettre que cette dernière soit supérieure à celle qui serait rendue disponible par l'alliage des deux métaux.

Supposons que, pour le zinc et le cuivre, le rapport des poids des plateaux soit celui qui constitue le laiton. Soit p le poids total, ε la somme de deux épaisseurs et δ la densité moyenne du système, on aura

$$p = S\varepsilon\delta \quad \text{ou} \quad S = \frac{p}{\varepsilon\delta}.$$

L'énergie électrique peut donc s'écrire

$$W = \frac{p}{8\pi\delta}\cdot\frac{V^2}{e\varepsilon}.$$

Cette équation demeure vraie tant que les métaux conservent leurs propriétés physiques, et il faut évidemment pour cela que l'épaisseur totale des deux plateaux soit supérieure à la distance normale e des couches électriques.

Supposons maintenant que, sans changer le poids total p, on augmente simultanément la surface des deux lames aux dépens de leur épaisseur, l'énergie W croît proportionnellement à la surface ou en raison inverse de l'épaisseur, au moins tant que l'épaisseur ε est supérieure à e. Le maximum d'énergie correspond au cas où $\varepsilon = e$, et l'on a alors

$$W = \frac{p}{8\pi\delta}\left(\frac{V}{e}\right)^2,$$

ou

$$e = V\sqrt{\frac{p}{8\pi\delta}\cdot\frac{1}{W}}.$$

L'énergie W doit rester inférieure à celle qui correspond à l'alliage. Celle-ci étant connue à $\frac{1}{3}$ près de sa valeur environ, on pourra donc déterminer par l'équation précédente une limite inférieure de la distance e des couches électriques. Pour une épaisseur plus faible, les métaux auraient perdu leurs propriétés, puisqu'ils ne seraient plus capables de prendre au contact la différence de potentiel qui les caractérise; on peut donc considérer que la constitution moléculaire de ces corps serait alors modifiée et que l'épaisseur ainsi calculée est de même ordre que la distance moyenne des atômes.

Sir W. Thomson a trouvé ainsi, pour le cuivre et le laiton,

$$e = \frac{1^{mm}}{3.10^7},$$

ce qui correspond à $\frac{1}{15\,000}$ environ de la longueur d'onde de la lumière verte.

Si l'on pouvait séparer les deux lames sans que les couches électriques en regard se recombinent partiellement, chacune d'elles se trouverait portée à un potentiel extrêmement élevé. Ce potentiel dépend des dimensions des lames, parce que la capacité du système est proportionnelle à la surface de contact, tandis que la capacité de chacune des lames séparées est pro-

portionnelle à ses dimensions linéaires. En admettant que la distance des couches électriques fût de $\frac{1}{10^6}$ de millimètre, M. Helmholtz a montré que pour un disque de zinc de 10 centimètres de rayon en contact avec un disque de cuivre maintenu en communication avec le sol, le potentiel du zinc transporté à une grande distance serait $39 . 10^6$ fois plus grand que le potentiel primitif dû au contact. Avec les nombres de sir W. Thomson, le potentiel final serait encore 30 fois plus grand.

192. Contact des diélectriques. — La première loi de Volta paraît également s'appliquer au contact soit des métaux avec les diélectriques, soit des diélectriques entre eux. Seulement dans ces deux cas la détermination des forces électromotrices de contact présente de très grandes difficultés.

Il suffit d'un point de contact entre deux corps conducteurs pour assurer l'équilibre des potentiels; les charges dépendent alors uniquement de la capacité du système formé par les deux corps au moment où leur séparation devient définitive. Avec les corps mauvais conducteurs, l'équilibre n'a lieu que pour les points en contact, et ceux-là seulement se chargent d'électricité. La charge totale sera donc extrêmement variable avec le nombre des points touchés. Ajoutons que le fait de la pénétration de l'électricité dans les diélectriques vient compliquer encore les expériences.

193. Électrisation par frottement. — Dans l'électrisation des corps par frottement, l'électricité ne semble pas avoir d'autre origine que le contact des deux corps; le frottement n'aurait pour but que de multiplier les points de contact.

Lorsque les corps frottés sont identiques, on ne parvient pas en général à les électriser; il se manifeste parfois des traces d'électricité très faibles, mais alors on peut toujours attribuer le développement de l'électricité à une dissymétrie plus ou moins visible entre les deux corps frottés.

194. Machines électriques. — On est donc conduit à conclure qu'il n'existe que deux modes de production de l'électricité, le *contact* et l'*induction*. Toutes les machines électriques mettent en jeu l'un ou l'autre de ces deux modes et ont

seulement pour objet d'accumuler les charges produites d'une manière ou de l'autre sur un conducteur.

La théorie générale de ces machines est très simple. Considérons un conducteur creux, isolé, le cylindre de Faraday, par exemple. Prenons, d'autre part, un gâteau d'électrophore, en résine ou en ébonite, chargé d'électricité négative. Un disque métallique tenu par un manche isolant, placé sur le gâteau et mis un instant en communication avec le sol, se chargera d'électricité positive, et, si on le transporte dans le cylindre et qu'on lui fasse toucher la surface intérieure, une charge égale à la sienne se produira sur la surface extérieure du cylindre; le disque lui-même sortira à l'état neutre et l'expérience pourra être répétée indéfiniment. Il est évident que rien en théorie ne limite la charge du cylindre, puisque, quelle que soit la charge qu'il a déjà acquise, un conducteur, placé à l'intérieur et mis en communication avec lui ne peut garder d'électricité. Tel est, réduit à sa plus simple expression, le mécanisme des machines fondées sur l'induction.

Supposons maintenant, au lieu du gâteau de l'électrophore, un disque de cuivre en communication avec le sol, et mettons en contact avec lui un disque de zinc tenu par un manche isolant; en vertu de la loi de Volta, le disque de zinc se chargera d'électricité positive; cette charge pourra, comme dans le cas précédent, être transmise au cylindre, et l'expérience recommencée indéfiniment.

Il en sera encore de même, si, au lieu d'un disque de cuivre, on prend un morceau de drap ou de caoutchouc, et un disque de verre au lieu d'un disque de zinc. Il faut, toutefois, tenir compte de la nature isolante des corps employés; le contact ne se produira entre le drap et les différents points de la surface de verre que par le frottement. Quand le verre chargé d'électricité positive sera porté à l'intérieur du cylindre, il déterminera sur la surface intérieure la formation d'une couche égale et de signe contraire à la sienne; seulement il ne suffira pas de lui faire toucher un point de la surface intérieure, pour que les deux charges se neutralisent. Mais on arrivera au même résultat si la surface intérieure du cylindre est armée de pointes : l'équilibre ne sera établi

que quand la densité sera nulle à l'extrémité de ces pointes, c'est-à-dire, lorsque l'électricité qui s'en échappe aura neutralisé la charge du disque de verre. C'est la disposition employée dans toutes les machines à frottement.

195. Organes essentiels des machines. — On voit que, dans tous les cas, la machine se réduit à trois organes essentiels, l'un qui développe l'électricité, un autre qui la transporte, un troisième qui la recueille : *un producteur*, *un transmetteur*, *un collecteur*. L'énergie potentielle communiquée au collecteur est fournie par le travail mécanique effectué, lorsqu'on transporte le *transmetteur* en sens contraire des forces électriques, depuis le *producteur* chargé d'électricité contraire qui l'attire, jusqu'au *collecteur* chargé d'électricité de même signe qui le repousse.

Dans les machines à frottement, le collecteur reçoit à chaque opération la même quantité d'électricité, et sa charge croît en progression arithmétique.

Dans le cas des machines à induction, on peut faire en sorte que la charge croisse en progression géométrique : il suffit d'accoupler deux machines de manière que les deux inducteurs développent des électricités de signes contraires et que chacun d'eux soit en communication métallique avec le collecteur de l'autre système. A chaque opération, la charge du producteur croît en même temps que celle du collecteur auquel il est relié, et développe par influence une charge plus grande dans le transmetteur à l'opération suivante. C'est la disposition qui est utilisée dans la machine de Varley et dans quelques-unes des machines si ingénieuses, telles que l'appareil à écoulement et le *replenisher*, imaginées par sir W. Thomson. La machine de Holtz repose sur le même principe, avec une disposition un peu plus compliquée.

196. Limite de la charge. — Si la théorie n'assigne aucune limite à la charge du *collecteur*, cette limite est atteinte dans la pratique, soit à cause de la déperdition par l'air ou par les supports, soit par le fait des décharges qui se produisent sous forme d'étincelles entre le collecteur et les autres parties de la machine ou les conducteurs voisins.

Dans le dernier cas, la limite ne dépend que de la forme de

la machine et de sa position par rapport aux conducteur voisins; dans le premier, elle dépend des conditions atmo sphériques et de la rapidité avec laquelle se succèdent les opé rations.

Pour les machines à addition, la limite est atteinte quand à chaque instant, le gain est égal aux pertes, et cette limit aura toujours une valeur finie.

Dans les machines à multiplication, certaines condition doivent être remplies pour que la charge du collecteu puisse conserver une valeur finie. Soient C et C′ les capacité des deux collecteurs, V et V′ leurs potentiels en valeurs ab solues, c et c' les capacités des transmetteurs, et n et n' l nombre d'opérations effectuées dans l'unité de temps.

Pour des charges très faibles la déperdition par l'air d'u conducteur électrisé est sensiblement proportionnelle à l charge ou au potentiel.

Si on appelle m et m' des coefficients de proportionnalit relatifs aux deux conducteurs, les pertes de charge pendan l'unité de temps pourront être représentées par mV et m'V′

Pendant un temps infiniment petit dt, l'accroissement d charge du collecteur C est égal à l'excès de l'électricité qu'i reçoit sur celle qu'il perd ; on aura donc

$$C\,dV = (n'c'V' - mV)\,dt,$$

ou bien

$$C\frac{dV}{dt} = n'c'V' - mV.$$

L'autre collecteur donnera, de même,

$$C'\frac{dV'}{dt} = ncV - m'V'.$$

En résolvant ces équations différentielles simultanées, on cal culerait la valeur acquise par les potentiels V et V′ au bou d'un temps quelconque, à partir de valeurs initiales données; mais les résultats ainsi obtenus ne s'accorderaient avec l'expé rience que dans les limites où l'on peut admettre la loi d

Coulomb. On sait que pour des charges un peu grandes la déperdition s'effectue suivant une loi plus rapide.

Ces équations donnent les conditions nécessaires pour que la charge aille en croissant; il suffit, en effet, que les dérivées du potentiel soient positives, ce qui donne

$$n'c'V' - mV > 0,$$
$$ncV - m'V' > 0;$$

on en déduit

$$\frac{m}{n'c} < \frac{V'}{V} < \frac{nc}{m'},$$

ou bien

$$nn'cc' > mm'.$$

Si cette dernière condition est réalisée au début (et l'on voit qu'elle ne dépend pas de l'électrisation initiale), la charge de la machine ira d'abord en croissant. Si l'inégalité se maintient malgré l'augmentation des coefficients m et m', la charge n'aura d'autre limite que celle qui sera déterminée par la production des étincelles. Si l'inégalité précédente avait lieu en sens contraire, la charge irait en diminuant et deviendrait rapidement nulle.

Lorsque l'appareil est symétrique, la condition d'accroissement de charge est simplement

$$nc > m.$$

Le calcul qui précède s'applique particulièrement à la disposition dans laquelle le collecteur d'une des machines est en communication métallique avec l'inducteur de l'autre; mais le même mode de raisonnement, à quelques détails près, s'appliquera à tous les multiplicateurs d'électricité à influence réciproque.

197. Débit des machines. — Quelle que soit, d'ailleurs, la cause extérieure qui limite la charge, on voit que toutes ces machines fonctionnent comme de véritables *sources*, c'est-à-dire, comme des systèmes capables par le jeu de leurs propres organes de maintenir un conducteur à un potentiel constant,

ou de maintenir une différence de potentiel déterminée entr deux conducteurs.

Ce résultat est obtenu lorsque la quantité d'électricité ap portée au collecteur est à chaque instant égale à celle qui lu est enlevée, soit par la déperdition au contact de l'air, soit pa des décharges provoquées d'une manière quelconque entr ce collecteur et le sol. Le *débit* de la machine est la quan tité d'électricité mise alors en mouvement dans chaque unit de temps. Pour les machines à addition, il est évident qu le débit, toutes choses égales d'ailleurs, est proportionne à la capacité du transmetteur et au nombre des opération effectuées dans chaque unité de temps. Si, comme dans le machines à plateau, le transmetteur fonctionne d'une ma nière continue, le débit est proportionnel à la vitesse.

Dans les machines à multiplication les phénomènes n se passent plus d'une manière aussi simple; mais l'expérienc montre encore que le débit est sensiblement proportionne à la vitesse, bien que cependant il croîsse, en général, un pe plus vite.

DEUXIÈME PARTIE — COURANTS ÉLECTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

PROPAGATION DE L'ÉLECTRICITÉ DANS L'ÉTAT PERMANENT

198. Régime permanent. — Quand on établit une communication métallique entre deux conducteurs isolés, à des potentiels différents V et V′, l'équilibre ne peut subsister, l'électricité positive va du corps au potentiel le plus élevé vers celui qui a le potentiel le plus bas; il se produit un *flux d'électricité*, un *courant électrique*. Si les deux corps ont des charges limitées, l'équilibre se trouve établi au bout d'un temps, en général, très court, qui dépend de la nature et des dimensions du conducteur intermédiaire; le courant est alors *variable* avec le temps. Mais si, par un procédé quelconque, on maintient constante la différence de potentiel de deux conducteurs, un régime permanent s'établit et le conducteur intermédiaire devient le siège d'un *courant constant*.

199. Analogie avec les phénomènes calorifiques. — L'analogie de ces phénomènes avec ceux de la propagation de la chaleur entre deux surfaces à températures constantes dans un milieu conducteur est manifeste, et cette analogie se traduit par des lois identiques dans les deux cas.

En rappelant les principes de la théorie de Fourier (70), nous avons vu que, si l'on considère dans un milieu conducteur de la chaleur deux surfaces isothermes voisines correspondant aux températures t et $t+dt$, le flux de chaleur dQ qui traverse pendant l'unité de temps un élément de surface dS est normal à l'élement, proportionnel à la différence de température dt des deux surfaces et en raison inverse de leur distance dn, et a pour expression

$$dQ = -k dS \frac{dt}{dn},$$

k étant le coefficient de conductibilité calorifique du milieu; le signe — signifie que le flux de chaleur progresse dans le sens des températures décroissantes. L'expression du flux est le même au travers d'un élément dS' d'une surface quelconque S' isotherme ou non; il est proportionnel à la dérivée partielle $\frac{\partial t}{\partial n'}$ de la température par rapport à la normale n' à la surface S' et on a

$$dQ' = -k dS' \frac{\partial t}{\partial n'}.$$

200. Théorie d'Ohm. — Ohm a transporté le mode de raisonnement de Fourier dans l'étude de la propagation de l'électricité. Il admet que tous les points d'un conducteur en équilibre sont dans un même état électrique, à la même *tension*. Lorsque l'équilibre n'a pas lieu, il se produit des échanges d'électricité; la tension en chaque point est en général une fonction du temps et des coordonnées; mais, si une cause étrangère maintient une différence constante entre les tensions des différentes parties du conducteur, il s'établit dans le système, au bout d'un temps plus ou moins long, un régime permanent pour lequel la tension en chaque point devient indépendante du temps.

Ohm admet, en outre, qu'entre deux molécules dont les tensions sont U et U' il se produit pendant l'unité de temps un échange d'électricité proportionnel à la différence des ten-

sions et à une fonction de la distance telle que les molécules voisines aient une influence prédominante.

Cette hypothèse est identique à celle de Fourier (70). Sans qu'il soit nécessaire de répéter les raisonnements, il en résulte que les échanges d'électricité ont lieu normalement aux surfaces d'égale tension ou aux surfaces de niveau électrique relatives à cette nouvelle propriété. Le flux d'électricité dQ qui traverse pendant l'unité de temps un élément dS d'une surface de niveau est proportionnel à la dérivée de la tension U par rapport à la normale à cette surface et a pour expression

$$dQ = -c\,dS\frac{dU}{dn},$$

le cofficient c dépendant de la nature du milieu et pouvant être appelé *coefficient de conductibilité électrique*. La dérivée $-\frac{dU}{dn}$ est la *force électromotrice* au point considéré. On voit aussi que par un élément dS' d'une surface quelconque il passe un flux d'électricité proportionnel à la force électromotrice suivant la normale à cette surface, ou à la dérivée $\frac{\partial U}{\partial n'}$.

Dans la théorie d'Ohm, comme dans celle de Fourier, on admet que la direction du flux est constamment parallèle à la direction de la force qui agit sur lui, et par conséquent indépendante de sa condition antérieure. Cette hypothèse est incompatible avec la notion de l'inertie et, par suite, avec celle de la matérialité de ce qui constitue le flux.

Ohm considère la tension comme un état particulier de chaque point en vertu duquel l'électricité tend à s'en échapper, et, lorsque les tensions sont variables dans un milieu, l'électricité s'écoule des points à tension élevée vers les points à tension plus faible. On voit déjà les analogies que présente cette fonction avec le potentiel, puisque la tension est aussi constante dans un conducteur en équilibre. Ohm paraît, dans quelques parties de ses mémoires, concevoir une relation trop étroite entre la densité électrique et la tension, mais il indique aussi qu'on pourrait déterminer la tension en un

point, même dans l'état variable, en reliant ce point par un fil avec un électroscope isolé, et la quantité qu'on mesurerait alors n'est autre chose que le potentiel.

201. Hypothèse de Kirchhoff. — Pour préciser la théorie d'Ohm dans les idées actuelles sur l'électricité, il suffit donc d'admettre, comme l'a fait M. Kirchhoff, que la tension et le potentiel sont deux fonctions identiques.

Il résulte de cette hypothèse que dans un système de conducteurs, reliés entre eux, mais non en équilibre électrique, le flux d'électricité en chaque point est proportionnel à la dérivée du potentiel suivant la normale à la surface de niveau, ou, en d'autres termes, proportionnel à la force électrique qui s'exerce en ce point, c'est-à-dire à la résultante des actions de toutes les masses du système dans leur état actuel.

Plus simplement encore, *le flux d'électricité est parallèle et proportionnel au flux de force.*

202. Superposition des états permanents. — Sous une autre forme, on peut dire que l'hypothèse consiste à admettre que la superposition de deux états d'équilibre dynamique est un nouvel état d'équilibre, dans lequel le flux qui traverse un élément de surface est égal à la somme des flux relatifs aux deux états primitifs.

Considérons, en effet, deux états pour lesquels les flux qui traversent un élément de surface dS sont AdS et $A'dS$; les composantes normales de la force sur cet élément sont $-\frac{\partial V}{\partial n}dS$ et $-\frac{\partial V'}{\partial n}dS$. En superposant les deux états, les potentiels s'ajoutent en chaque point, et la force normale sur l'élément dS devient

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V'}{\partial n}\right)dS.$$

Par hypothèse, le flux au travers de l'élément dS est devenu

$$AdS + A'dS.$$

Si on suppose les états primitifs identiques, le flux est devenu

$2AdS$ et la force est aussi doublée; le flux d'électricité est donc proportionnel au flux de force.

Si l'état est permanent, c'est-à-dire si le potentiel est invariable en chaque point, le flux qui traverse un élément de surface quelconque est constant. Si l'état est variable, les potentiels varient avec le temps, et le flux d^2Q qui traverse un élément de surface pendant le temps dt est

$$d^2Q = -cdS\frac{\partial V}{\partial t}dt.$$

203. Dans le régime permanent la densité est nulle à l'intérieur des conducteurs. — Le flux d'électricité ne peut s'accumuler dans l'intérieur d'une surface fermée sans en modifier le potentiel, de même qu'un accroissement du flux de chaleur y produirait une élévation de température.

Si le régime permanent est atteint pour un système de conducteurs, le flux total que reçoit chaque élément est nul. En écrivant que la somme algébrique des flux qui entrent dans un élément de volume $dxdydz$ est égal à zéro, on retrouve l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0.$$

Comme on a toujours, en appelant ρ la densité cubique de l'électricité au point considéré,

$$\Delta V = -4\pi\rho,$$

il en résulte

$$\rho = 0.$$

La loi de proportionnalité du flux d'électricité au flux de force conduit immédiatement à la même conséquence. En effet, si le régime est permanent, le flux de l'électricité pour un élément de volume est nul : le flux de force qui lui est proportionnel est nul aussi ; mais ce dernier est égal à $4\pi m$, m étant la masse comprise dans le volume considéré ; donc $m = 0$. Ainsi, quand un système de conducteurs est arrivé à un régime permanent, la densité électrique est nulle dans tous

les conducteurs; les masses électriques qui donnent lieu au potentiel V et dont l'action détermine le courant sont donc entièrement à la surface des conducteurs. Ces masses ne sont pas en équilibre d'elles-mêmes et elles produisent en chaque point la force électromotrice du courant.

Il résulte de là que le flux, quel qu'il soit, s'il a une existence réelle, n'est pas un flux d'électricité libre ; dans l'hypothèse des deux fluides, il faudrait admettre qu'il se trouve à chaque instant, dans chaque élément de volume à l'intérieur du conducteur, la même quantité des deux électricités, et que celles-ci se meuvent en deux courants égaux de directions opposées. Dans l'hypothèse d'un seul fluide, il faudrait considérer chaque élément comme contenant à chaque instant la quantité normale d'électricité, tout en supposant que celle-ci se déplace en totalité ou en partie.

204. Conducteurs linéaires. — Loi d'Ohm. — Considérons d'abord un fil cylindrique d'une grande longueur par rapport à son diamètre, placé dans un milieu parfaitement isolant, et supposons que le régime permanent soit atteint.

S'il n'y a aucune perte par la surface, le flux d'électricité est en chaque point parallèle aux génératrices du cylindre; les surfaces de niveau sont donc des plans perpendiculaires à l'axe du fil. Le flux d'électricité qui traverse une section quelconque du fil pendant l'unité de temps est le même dans toute sa longueur; appelons ce flux *intensité du courant* et désignons-le par i. Soit V le potentiel au point P situé à une distance x d'un plan fixe normal au fil et S la section du fil.

Le potentiel est simplement une fonction de x et l'intensité a pour expression

$$i = -cS\frac{dV}{dx}.$$

Comme ce flux est indépendant de x, on a

$$\frac{dV}{dx} = a, \qquad \text{et} \qquad V = ax + b,$$

a et b étant des constantes à déterminer.

Désignons par V_1 et V_2 les valeurs du potentiel et deux points A et B (fig. 49) distants de l, et prenons le point A pour origine des coordonnées, il vient

$$V = -\frac{V_1 - V_2}{l} x + V_1 \tag{1}$$

et, par suite,

$$I = cS\frac{V_1 - V_2}{l} = \frac{V_1 - V_2}{\frac{cS}{l}}. \tag{2}$$

Le quotient $\frac{l}{cS} = r$ s'appelle la *résistance* du fil entre les deux



Fig. 49

points A et B, et l'inverse de cette résistance $\frac{cS}{l}$ est la *conductibilité* de ce même fil.

Les équations (1) et (2) montrent que :

1° *Le potentiel décroît en progression arithmétique le long du fil, dans le sens de la propagation du courant;*

2° *Entre deux points A et B l'intensité du courant est égale au quotient de la différence du potentiel de ces deux points par la résistance du fil intermédiaire.*

Ces deux énoncés constituent la *loi d'Ohm*.

On peut remarquer que la distribution du potentiel et le flux d'électricité dans le cas que nous venons de considérer sont identiques à la distribution des températures et au flux de chaleur qui se propage dans un mur homogène limité par deux plans parallèles maintenus respectivement à des températures constantes.

205. La résistance d'un conducteur est l'inverse d'une vitesse. — La quantité r que nous avons appelée la résistance du conducteur a pour valeur $\frac{l}{cS}$; elle est proportionnelle à la lon-

gueur du conducteur, en raison inverse de sa section et du coefficient de conductibilité du milieu.

Le rapport $\frac{1}{c}$ représente la résistance d'un cube égal à l'unité; on peut l'appeler *résistance spécifique* du conducteur.

La résistance d'un conducteur est une grandeur de même nature que l'inverse d'une vitesse en mécanique.

On a, en effet,

$$r = \frac{V_1 - V_2}{i}.$$

La différence du potentiel $V_1 - V_2$ est égale au quotient d'une masse électrique M par une longueur a; l'intensité d'un courant, ou le flux pendant l'unité de temps, est égale au rapport de la quantité d'électricité M' qui s'écoule pendant le temps t au temps correspondant. On a donc

$$r = \frac{\frac{M}{a}}{\frac{M'}{t}} = \frac{M}{M'} \cdot \frac{1}{\frac{a}{t}}.$$

Le quotient $\frac{M}{M'}$ est un nombre abstrait, et le rapport $\frac{a}{t}$ une vitesse. La résistance r est donc l'inverse d'une vitesse.

206. — On peut d'ailleurs imaginer une expérience dans laquelle cette vitesse aura une signification physique.

Considérons une sphère de rayon R chargée d'une masse M d'électricité et supposons qu'on mette cette sphère en communication avec le sol par un conducteur de résistance r.

Le potentiel de cette sphère est égal à $\frac{M}{R}$; il diminue dès que la communication avec le sol est établie; mais si la sphère se contracte en même temps que la charge diminue, il peut arriver que le potentiel reste constant.

Cette condition étant réalisée, on aura, en appelant dM la perte de charge de la sphère et dR la diminution du rayon

pendant le temps dt,

$$V = \frac{M}{R} = \frac{M - dM}{R - dR} = \frac{dM}{dR};$$

mais, en vertu de la loi d'Ohm,

$$dM = \frac{V}{r} dt.$$

Pour que le potentiel soit constant, il faut que dR soit aussi proportionnel au temps; posons donc

$$dR = u\,dt.$$

Il vient alors

$$V = \frac{\frac{V}{r} dt}{u\,dt} = \frac{V}{ru}.$$

et, par suite,

$$r = \frac{1}{u}.$$

Ainsi la résistance r d'un conducteur est l'inverse de la vitesse u avec laquelle doit décroître le rayon d'une sphère pour que le potentiel y reste constant, malgré la perte d'électricité, quand on la fait communiquer avec le sol par le conducteur considéré.

207. Conducteurs linéaires quelconques. — Nous avons supposé les conducteurs rectilignes, mais le même raisonnement s'applique évidemment à des conducteurs linéaires contournés d'une manière quelconque, le flux d'électricité étant en chaque point normal à la section droite du conducteur.

Si le circuit est formé de deux ou plusieurs portions cylindriques de sections et de natures différentes ajoutées bout à bout, on considérera ces différentes parties séparément.

Soient par exemple V_1 et V_2 les potentiels en deux points A et B (fig. 50) appartenant, le premier à un conducteur dont la section est S et le coefficient de conductibilité c, et le second à un conducteur pour lequel ces quantités sont S' et c'.

Soit V' le potentiel au point O de contact des deux cylindres, situé à des distances l et l' de A et de B et négligeons pour un instant la force électromotrice de contact des deux conducteurs, sur laquelle nous reviendrons plus loin. On a, de part et d'autre du point O,

$$i = \frac{V_1 - V'}{\frac{l}{cS}} = \frac{V' - V_2}{\frac{l'}{c'S'}} = \frac{V_1 - V_2}{\frac{l}{cS} + \frac{l'}{cS'}} = \frac{V_1 - V_2}{r + r'}.$$

L'intensité du courant est donc en raison inverse de la somme des résistances des deux conducteurs entre les points A et B. Cette relation est évidemment générale.

Ainsi, la résistance d'une série de conducteurs cylindriques

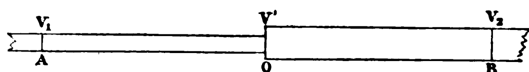


Fig. 50

successifs est égale à la somme des résistances de tous les conducteurs.

Enfin, considérons un conducteur de forme quelconque terminé à ses entrémités par des surfaces de niveau maintenues à des potentiels V_1 et V_2; l'intensité du courant est encore proportionnelle à la différence $V_1 - V_2$ des potentiels et le nombre par lequel il faut diviser cette différence, pour obtenir l'intensité du courant représente la résistance du conducteur. Le nombre ainsi obtenu est la résistance du conducteur cylindrique qui, pour la même différence de potentiel, donnerait la même intensité.

208. Lois de Kirchhoff. — Supposons que des conducteurs linéaires, de natures et de dimensions différentes, soient réunis les uns aux autres par des liaisons complexes, le partage du courant entre ces différents conducteurs doit satisfaire aux deux conditions suivantes qui se déduisent immédiatement de la loi d'Ohm.

1° *Si plusieurs conducteurs aboutissent à un même point, la*

somme des intensités des courants sur chacun d'eux, comptées à partir de ce point, est nulle.

En effet, puisqu'il ne peut y avoir accumulation d'électricité au point considéré, il faut que la quantité d'électricité apportée par une partie des conducteurs soit égale à celle qui est emportée par les autres pendant le même temps ; en affectant du signe + les courants qui marchent vers le point et du signe — ceux qui s'en éloignent, on doit avoir

$$(3) \qquad \sum i = 0.$$

2° *Si plusieurs conducteurs forment un polygone fermé, la somme des produits de la résistance de chaque conducteur par l'intensité du courant qui le traverse est nulle.*

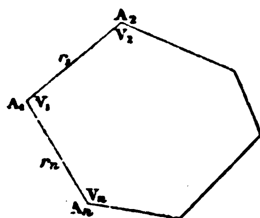


Fig. 51

Supposons, en effet, une série de conducteurs de résistances $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_n$ qui forment les côtés successifs d'un polygone fermé (fig. 51); soient $V_1, V_2 \ldots\ldots V_n$ les potentiels aux différents sommets $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$, et enfin $i_1, i_2 \ldots\ldots i_n$ les intensités des courants successifs, comptées positivement quand on parcourt le circuit dans un sens déterminé. Ces intensités ne sont pas égales parce qu'il peut exister aux différents sommets d'autres conducteurs qui emportent ou amènent des courants.

On aura successivement :

Pour le premier conducteur		$i_1 r_1 = V_1 - V_2$,
— second	—	$i_2 r_2 = V_2 - V_2$,
⋮		⋮ ⋮
— n^e	—	$i_n r_n = V_n - V_1$.

En ajoutant ces équations membre à membre, tous les potentiels disparaissent et il reste finalement

$$i_1 r_1 + i_2 r_2 + \cdots\cdots + i_n r_n = 0,$$

ou

(4) $$\sum ir = 0.$$

Les deux relations (3) et (4) sont connues sous le nom de *lois de Kirchhoff*.

209. Problème des courants dérivés. — Comme application de ces théorèmes considérons le cas où le circuit se divise en arcs multiples, entre deux points A et B (fig. 52). Soit I l'intensité du courant avant le point A et après le point B, $r_1, r_2 \cdots r_n$ les résistances des conducteurs, $i_1, i_2 \cdots i_n$ les intensités respectives du courant, et enfin R la résistance du

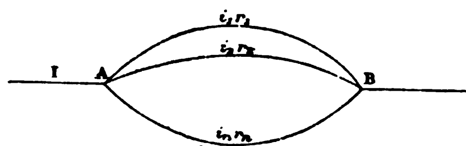


Fig. 52

circuit unique qui équivaudrait au circuit multiple entre les deux mêmes points. On aura

$$I = i_1 + i_2 + i_3 \cdots\cdots + i_n = \sum i,$$
$$i_1 r_1 = i_2 r_2 = i_3 r_3 = i_n r_n = IR.$$

La seconde équation peut s'écrire

$$\frac{i_1}{\frac{1}{r_1}} = \frac{i_2}{\frac{1}{r_2}} = \cdots\cdots = \frac{i_n}{\frac{1}{r_n}} = \frac{I}{\frac{1}{R}},$$

et on en déduit

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{r_n} = \sum \frac{1}{r}.$$

Ainsi l'inverse de la résistance d'un faisceau de conduc-

teurs aboutissant aux mêmes points est égale à la somme des inverses de résistances des différents conducteurs séparés ; en d'autres termes, la conductibilité du faisceau est égale à la somme des conductibilités des différents conducteurs qui le constituent, ce qui était évident.

210. Circuits linéaires hétérogènes. — L'existence des forces électromotrices de contact entre les métaux modifie un peu l'expression de la loi d'Ohm. Considérons deux points P_1 et P_2 (fig. 53) séparés par deux conducteurs différents A et B dont les résistances sont a et b. Soient V_1, et V_2 les potentiels aux points P_1 et P_2, V_a et V_b les potentiels au point P de part et d'autre de la surface de séparation des métaux. L'intensité du courant de P_1 en P_2 est

$$I=\frac{V_1-V_a}{a}=\frac{V_b-V_2}{b}=\frac{V_1-V_2+V_b-V_a}{a+b}.$$

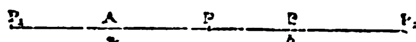


Fig. 53

Désignant par H_{ab} l'élévation brusque qu'éprouve le potentiel entre les métaux A et B quand on suit le courant, c'est-à-dire la force électromotrice de contact $V_b - V_a = B|A$ des conducteurs B et A, il vient

$$I=\frac{V_1-V_2+H_{ab}}{a+b}.$$

Supposons maintenant qu'un circuit fermé soit composé de conducteurs différents A, B, C ..... L (fig. 54), comprenant des corps de la seconde classe de Volta, c'est-à-dire que la chaîne des conducteurs n'obéisse pas à la loi des tensions ; le circuit sera parcouru par un courant permanent.

Appelons r_a, r_b, r_c ..... r_l, les résistances des différents conducteurs, V_a et V'_a, V_b et V'_b,.... les potentiels successifs aux extrémités de chacun d'eux en suivant le sens du courant, et représentons de même par H_{ba}, H_{bc} ..... H_{la}, les forces élec-

tromotrices de contact successives; on a

$$\begin{aligned}
H_{ab} &= V_b - V'_a,\\
H_{bc} &= V_c - V'_b,\\
&\vdots\\
H_{la} &= V_a - V'_l.
\end{aligned}$$

L'intensité du courant étant la même dans toute l'étendue du circuit, on a aussi

$$I = \frac{V_a - V'_a}{r_a} = \frac{V_b - V'_b}{r_b} = \ldots\ldots = \frac{V_l - V'_l}{r_l},$$

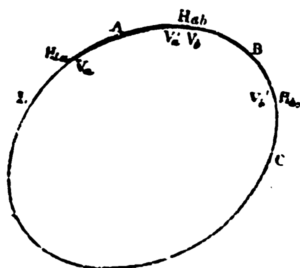


Fig. 54

ou, en combinant par addition ces rapports égaux,

$$I = \frac{(V_b - V'_a) + (V_c - V'_b) + \cdots + (V_a - V'_l)}{r_a + r_b + r_c + \cdots\cdots + r_l} = \frac{H_{ab} + H_{bc} + \cdots + H_{la}}{r_a + r_b + r_c + \cdots\cdots + r_l}.$$

Le numérateur de cette fraction représente la somme algébrique $\sum H$ des forces électromotrices du contact dans la chaîne des conducteurs; c'est la force électromotrice E du circuit. Le dénominateur est la somme des résistances, ou la résistance totale R du circuit. On a donc

$$I = \frac{\sum H}{R} = \frac{E}{R}.$$

211. Cas où le circuit renferme des forces électromotrices. — Il est facile de voir ce que deviennent les lois de Kirchhoff (208), quand il y a des forces électromotrices.

Le premier théoreme n'est pas modifié. La somme des quantités d'électricité qui émanent d'un point où aboutissent différents conducteurs est toujours nulle, dans l'état permanent; en effet, ce point ne peut être ni un centre de production indéfinie d'électricité, ni un centre d'absorption.

Le second théorème doit être modifié. Supposons que, dans le circuit précédent, les limites des différents conducteurs soient marquées par un changement de métal ou par des points d'embranchement avec les sommets A d'autres conducteurs. L'intensité du courant n'est plus la même dans toute l'étendue du circuit; désignons par i_a, $i_b \cdots\cdots i_l$ les intensités sur les différents conducteurs entre deux points successifs de contact ou d'embranchement. On aura, d'après la loi d'Ohm,

$$\begin{aligned} V_a - V'_a &= r_a i_a, \\ V_b - V'_b &= r_b i_b, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_l - V'_l &= r_l i_l, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} r_a i_a + r_b i_b + \cdots + r_l i_l &= (V_a - V'_a) + (V_b - V'_b) + \cdots + (V_l - V'_l) \\ &= (V_l - V'_a) + (V_c - V'_b) + \cdots + (V_a - V'_l) \\ &= H_{ab} - H_{bc} + \cdots + H_{la} = \sum H = E, \end{aligned}$$

ou

$$E = \sum ri. \tag{6}$$

Ainsi, dans un circuit fermé, *la somme des produits de la résistance de chaque conducteur par l'intensité du courant correspondant est égale à la somme algébrique des forces électromotrices du circuit.*

Cette somme est nulle si le circuit est formé de conducteurs de même nature, ou de métaux à la même température, puisque ces derniers obéissent à la loi des tensions.

Les deux relations (5) et (6) fournissent toutes les équations nécessaires à la détermination des intensités dans les diverses

branches du circuit. Toute modification dans les résistances ou les forces électromotrices qui n'apportera aucun changement dans les équations sera évidemment sans influence sur l'intensité des courants. Par exemple :

1° On peut modifier à volonté la résistance d'une branche dans laquelle l'intensité est nulle ;

2° On peut introduire dans tous les conducteurs qui aboutissent à un même point des forces électromotrices égales et tendant à produire des courants qui s'approchent ou s'éloignent tous du point considéré, ces forces électromotrices s'annulant deux à deux dans tous les contours fermés qui passent par le point.

212. Conducteurs de forme quelconque. — Électrodes. — L'analogie de la conductibilité électrique avec la conductibilité calorifique et de cette dernière avec les phénomènes d'électricité statique nous permet d'établir directement quelques théorèmes relatifs à la propagation de l'électricité.

Considérons d'abord un milieu unique, isotrope, indéfini. Supposons que, pour les trois ordres de phénomènes différents, la température d'une part et le potentiel d'autre part soient maintenus constants sur différentes surfaces fermées S_1, S_2, ... S_n, et que sur chacune des surfaces les températures et les potentiels t_1 et V_1, t_2 et V_2 ..... soient représentés par les mêmes nombres ou par des nombres proportionnels. Dans le problème calorifique, ces surfaces représenteront les sources de chaleur; dans le problème d'électricité statique, les conducteurs; dans le problème de la propagation de l'électricité, on les appelle les *électrodes*.

La température et le potentiel en un point quelconque du milieu sont des fonctions des coordonnées définies par la condition que ces fonctions prennent des valeurs déterminées sur les surfaces limites et satisfassent dans l'intervalle de ces surfaces à la condition

$$\Delta t = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta V = 0.$$

La température et le potentiel auront donc en chaque point des valeurs égales ou dans un rapport constant. Les surfaces isothermes et les surfaces de niveau électrique seront iden-

tiques dans toute l'étendue du milieu et, par suite, les tubes de flux identiques.

Au travers d'un élément dS d'une surface quelconque, le flux de chaleur (20) est $-kdS\frac{\partial t}{\partial n}$, le flux de force électrostatique est $-dS\frac{\partial V}{\partial n}$ et le courant électrique $-cdS\frac{\partial V}{\partial n}$, k et c étant les coefficients de conductibilité calorifique et électrique. Ces trois flux sont donc proportionnels entre eux.

D'après cela, toutes les fois qu'un problème de propagation uniforme de la chaleur ou d'électricité statique aura été résolu, le problème correspondant de propagation électrique à l'état permanent se trouvera résolu de la même manière.

Nous avons vu, en particulier, que, si on se donne les potentiels V_1, V_2 .., V_n sur les surfaces fixes S_1, S_2 .., S_n, c'est-à-dire les potentiels des différents conducteurs dans l'air, le potentiel est défini en chaque point du milieu et le problème d'équilibre n'a qu'une solution. De même, si le milieu diélectrique est remplacé par un milieu conducteur, et que les potentiels soient maintenus constants sur les mêmes surfaces S_1, S_2 ... S_n, le flux d'électricité est déterminé en chaque point et l'état permanent est unique.

212. — Supposons maintenant que deux diélectriques, dont les pouvoirs inducteurs sont μ_1 et μ_2, soient séparés par une surface S. Le flux de force ne se conserve pas de part et d'autre de la surface, mais le flux d'induction se conserve, et l'on a (121), en comptant la normale n à la surface dans le même sens pour les deux milieux

$$\mu_1\frac{\partial V_1}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial V_2}{\partial n}.$$

C'est la condition de continuité sur la surface. Si on remplace les diélectriques par des conducteurs dont les coefficients de conductibilité soient c_1 et c_2, le flux d'électricité est alors le même de part et d'autre de la surface S, ce qui donne

$$c_1\frac{\partial V_1}{\partial n}=c_2\frac{\partial V_2}{\partial n}.$$

On voit, d'après cela, que si, dans un problème d'électrostatique renfermant des diélectriques dont les pouvoirs inducteurs sont $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$, on remplace les diélectriques par des conducteurs dont les coefficients de conductibilité $c_1, c_2, \cdots c_n$ soient respectivement proportionnels aux pouvoirs inducteurs correspondants, c'est-à-dire tels que l'on ait

$$\frac{\mu_1}{c_1} = \frac{\mu_2}{c_2} = \ldots\ldots = \frac{\mu_n}{c_n},$$

le flux d'électricité en chaque point sera proportionnel au flux d'induction du système électrostatique corrélatif.

Ainsi, tous les problèmes qui ont été résolus en électrostatique pour un ensemble de diélectriques fournissent aussi la solution des problèmes correspondants de propagation d'électricité. Tels sont, par exemple, les cas suivants :

Sphères concentriques (**77**).

Cylindres concentriques (**80**) ou cylindres excentriques dont l'un est intérieur à l'autre (**136**).

Plans parallèles (**81**).

Condensateurs fermés à épaisseur constante (**79**).

Sphères concentriques successives formées de milieux différents (**164**).

214. Conducteurs non homogènes. — Nous avons vu aussi (**167**) qu'en assimilant un diélectrique à un milieu de pouvoir inducteur μ_2 dans lequel seraient disséminées de petites sphères de pouvoir inducteur μ_1, le milieu ainsi constitué se comporte comme un diélectrique homogène dont le pouvoir inducteur μ serait représenté par l'expression

$$\mu = \mu_2 \frac{\mu_1 + 2\mu_2 - 2h(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + 2\mu_2 + h(\mu_2 - \mu_1)},$$

dans laquelle h désigne le rapport de la somme des volumes des petites sphères au volume total de l'espace dans lequel elles sont disséminées.

Dans des conditions analogues, la conductibilité spécifique moyenne d'un milieu de conductibilité c_2, renfermant de pe-

tites sphères de conductibilité c_1, a pour expression

$$c = c_2 \frac{c_1 + 2c_2 - 2h(c_2 - c_1)}{c_1 + 2c_2 + h(c_2 - c_1)}.$$

Si le rapport $\frac{c_1}{c_2}$ des pouvoirs conducteurs des sphères et du milieu ambiant est très grand, la formule se réduit à

$$c = c_2 \frac{1 + 2h}{1 + h}.$$

De même, le problème du n° **150** donnerait la conductibilité d'un système formé de trois milieux différents séparés par deux plans parallèles.

215. Conducteurs anisotropes. — Nous n'avons jusqu'ici considéré que des corps isotropes, c'est-à-dire des corps jouissant des mêmes propriétés dans toutes les directions. Si le milieu est anisotrope, mais homogène, comme les corps cristallisés, les phénomènes physiques dépendent de la direction suivant laquelle on les envisage.

La dilatation, par exemple, peut être très inégale. Il existe alors trois directions principales, rectangulaires entre elles, et telles que la dilatation d'un cylindre infiniment mince considéré dans le milieu parallèlement à l'une des directions principales s'effectue suivant l'axe du cylindre. Chacune de ces directions est définie par un coefficient particulier, ce qui donne pour le milieu trois coefficients principaux de dilatation l, l' et l''. Si l'on imagine dans le milieu un cylindre infiniment mince dans une direction quelconque qui fasse avec les directions principales des angles dont les cosinus sont δ, δ' et δ'', ce cylindre tourne en même temps qu'il se dilate, mais en restant rectiligne si le milieu est homogène. La dilatation parallèlement à l'axe du cylindre est égale à la somme des projections sur cet axe des trois dilatations principales, et le coefficient L relatif à cette direction a pour valeur

$$L = l\delta + l'\delta' + l''\delta''.$$

Les mêmes considérations s'appliquent à la propagation de la chaleur, à la propagation de l'électricité et à l'induction électrostatique.

Dans un milieu anisotrope, le flux de chaleur en un point n'est plus normal à la surface isotherme correspondante; mais, comme pour la dilatation et, en général, pour toutes les propriétés qui sont des fonctions linéaires de causes dont elles dépendent, il y a encore trois directions rectangulaires suivant lesquelles le flux de chaleur est normal aux surfaces isothermes, et auxquelles correspondent trois coefficients principaux de conductibilité k, k' et k''.

Au travers d'un élément de surface dS dont la normale fait avec les axes des angles dont les cosinus sont α, α' et α'', le flux de chaleur est égal à la somme des flux qui correspondent aux projections αdS, $\alpha' dS$, $\alpha'' dS$ de l'élément normales aux trois axes principaux; on a donc, en prenant ces trois directions pour axes de coordonnées,

$$dQ = -dS\left[k\alpha\frac{\partial t}{\partial x} + k'\alpha'\frac{\partial t}{\partial y} + k''\alpha''\frac{\partial t}{\partial z}\right].$$

De même encore, en désignant par c, c' et c'' les coefficients de conductibilité électrique du milieu suivant les axes principaux, le flux d'électricité dM au travers d'un élément de surface dS aura une expression analogue en fonction des potentiels. Si on appelle I_n l'intensité du courant par unité de surface suivant la normale à l'élément, on aura

$$dM = I_n dS = -dS\left[c\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + c'\alpha'\frac{\partial V}{\partial y} + c''\alpha''\frac{\partial V}{\partial z}\right],$$

ou

$$I_n = -\left[c\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + c'\alpha'\frac{\partial V}{\partial y} + c''\alpha''\frac{\partial V}{\partial z}\right].$$

Cette dernière expression est la somme des projections sur la normale des intensités des courants I, I', I'' suivant les trois directions principales, ou la projection du courant résultant I_0.

En appelant θ l'angle de la normale à l'élément dS avec

la direction du courant, laquelle fait avec les axes des angles dont les cosinus sont λ, λ', λ'', on a donc

$$I_n = (\alpha I + \alpha' I' + \alpha'' I'') = (\alpha\lambda + \alpha'\lambda' + \alpha''\lambda'') I_0 = I_0 \cos\theta,$$

et

$$\frac{\lambda}{c\frac{\partial V}{\partial x}} = \frac{\lambda'}{c'\frac{\partial V}{dy}} = \frac{\lambda''}{c''\frac{\partial V}{\partial z}}.$$

216. — Nous pouvons maintenant étendre sans difficulté le même mode de raisonnement aux phénomènes d'induction dans les diélectriques anisotropes. Là encore, il existe trois directions principales d'induction, telles que le flux de force est normal aux surfaces de niveau, et qu'on peut caractériser par les pouvoirs inducteurs spécifiques μ, μ' et μ''. Le flux d'induction au travers d'un élément dS est, en appelant φ le flux par unité de surface,

$$\varphi dS = -dS\left[\mu\alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \mu'\alpha'\frac{\partial V}{\partial y} + \mu''\alpha''\frac{\partial V}{\partial z}\right].$$

Si l'on désigne par β, β' et β'' les cosinus des angles avec les axes de la force électrique F au point considéré, laquelle est normale à la surface de niveau, on peut écrire

$$\varphi = (\mu\alpha\beta + \mu'\alpha'\beta' + \mu''\alpha\beta'')\,F.$$

Dans ce cas le déplacement électrique (**126**) n'est plus parallèle à la force électrique.

217. Conducteurs à deux dimensions. — Les considérations qui précèdent s'appliquent aux milieux indéfinis. Rien n'est changé évidemment si on limite le milieu conducteur par une surface formée tout entière par des lignes de flux du système indéfini. Pour un conducteur limité situé dans un milieu isolant, la surface extérieure, quelle qu'elle soit, est toujours parallèle aux lignes de flux et par conséquent, si le milieu est isotrope, normale aux surfaces de niveau.

Tel est le cas de la propagation de l'électricité dans une

plaque mince, que l'on peut considérer comme un conducteur à deux dimensions. On peut déterminer expérimentalement le lieu des points qui ont un même potentiel, par la condition qu'aucun courant ne s'établisse dans un fil conducteur dont une des extrémités est mise en communication avec un point fixe de la plaque, tandis que l'autre est déplacée dans son plan. Les résultats donnés par l'expérience sont en parfaite concordance avec ceux qu'on déduit des formules de Fourier et apportent une nouvelle confirmation de l'analogie des deux ordres de phénomènes.

Dans les deux cas, on peut supposer aussi que la propagation a lieu avec ou sans perte par le milieu ambiant.

Si il n'y a aucune perte par le milieu extérieur, l'équation de Poisson, pour tout point pris en dehors des électrodes, se réduit à

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0,$$

et, pour chaque point du contour de la plaque, on a

$$\frac{\partial V}{\partial n}=0.$$

Il est facile de reconnaître que ce problème se confond avec le problème de l'équilibre dans le cas d'une distribution cylindrique (132 et suiv.). Nous avons vu qu'alors, dans un plan traversé normalement en des points A_1, A_2, A_3 ·· par des lignes parallèles de densités λ_1, λ_2, λ_3 ···, le potentiel en un point P, situé à des distances r_1, r_2, r_3 ··· de ces lignes, a pour valeur

$$V=C^{te}-2\sum\lambda l.r.$$

Les flux de force qui, dans une couche d'épaisseur ε comprise entre deux plans parallèles, émanent des différentes lignes sont

$$\varphi_1=4\pi\lambda_1\varepsilon,$$
$$\varphi_2=4\pi\lambda_2\varepsilon,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Si, dans le problème de propagation, on considère les mêmes portions de lignes comme des sources d'électricité, des *électrodes*, les flux d'électricité ou les intensités des courants sont

$$I_1 = c\varphi_1 = 4\pi c\lambda_1\varepsilon,$$
$$I_2 = c\varphi_2 = 4\pi c\lambda_2\varepsilon,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on en déduit

$$\lambda_1 = \frac{I_1}{4\pi c\varepsilon},$$
$$\lambda_2 = \frac{I_2}{4\pi c\varepsilon},$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

et l'expression du potentiel en P devient

$$V = C^{te} - \sum \frac{I l.r}{2\pi c\varepsilon} = C^{te} - \frac{1}{2\pi c\varepsilon}\left[I_1 l.r_1 + I_2 l.r_2 + \ldots\ldots\right].$$

Un cas particulièrement intéressant est celui de deux électrodes A_1 et A_2 fournissant des flux égaux et de signes contraires. Dans ce cas

$$I_1 + I_2 = 0$$

et

$$V = C^{te} - \frac{I}{2\pi c\varepsilon} l.\frac{r_1}{r_2}.$$

Les lignes de flux sont des segments de cercle passant par les deux points A_1 et A_2 (fig. 30); les lignes de niveau sont des circonférences ayant leurs centres sur la ligne $A_1 A_2$ et telles que ces deux points soient conjugués par rapport à chacune d'elles. Il est évident, d'après la remarque faite plus haut, que le problème restera le même si, au lieu d'une plaque indéfinie, on considère une plaque circulaire ayant les deux électrodes sur sa circonférence, ou encore une plaque quelconque comprise entre deux segments circulaires passant par les points A_1 et A_2.

218. Résistance d'un conducteur de forme quelconque. — Quel que soit le conducteur que l'on considère, on peut toujours le supposer divisé, par deux séries de surfaces parallèles aux lignes de flux, en tubes infiniment déliés et dont chacun est un tube de flux. Chacun de ces tubes peut lui-même être assimilé à un fil conducteur de section variable dont la résistance est en chaque point en raison inverse de la section. La résistance totale se déduira de la résistance de l'ensemble par les lois ordinaires des courants dérivés : l'inverse de la résistance totale, ou la conductibilité, sera la somme des inverses des résistances de tous ces tubes.

Le calcul sera en général très compliqué; mais quand on connaît par expérience la valeur du potentiel sur les deux électrodes et le flux d'électricité correspondant, il est facile de déterminer la résistance totale de milieu conducteur par la formule d'Ohm (207).

Prenons comme exemple le cas de deux électrodes A_1 et A_2 dans un milieu indéfini. Nous pouvons supposer que ces électrodes sont de petites sphères de rayon ρ. Soient V_1 et V_2 leurs potentiels et I la valeur absolue du flux d'électricité qui correspond à chacune d'elles. Si le rayon ρ est négligeable vis-à-vis de la distance $A_1 A_2$, on peut admettre que le potentiel au voisinage de chacune des électrodes est en raison inverse de la distance r et représenté par $\frac{b}{r}$, ce qui donnera sur les sphères elles-mêmes

$$V_1 = -V_2 = \frac{b}{\rho}.$$

L'intensité du courant est alors

$$I = c\int F_n dS = -4\pi\rho^2 c \frac{dV}{dn}.$$

Comme on a, sur la surface de la sphère,

$$\frac{dV}{dn} = -\frac{b}{r^2} = -\frac{b}{\rho^2},$$

il vient

$$I = 4\pi cb = 4\pi c V_1 \rho = -4\pi c V_2 \rho,$$

ou

$$I = 2\pi c\rho (V_1 - V_2).$$

D'après cela, la résistance totale R du milieu aurait pour expression

$$R = \frac{1}{2\pi c\rho}.$$

Le même raisonnement s'appliquerait au cas d'un milieu indéfini d'un côté et terminé de l'autre par un plan sur lequel seraient placées deux électrodes hémisphériques A_1 et A_2. La résistance serait alors double de la précédente et l'on aurait

$$R = \frac{1}{\pi c\rho}.$$

Il est remarquable que la résistance soit indépendante de la distance des deux électrodes et ne dépende que de leurs dimensions et de la conductibilité du milieu. Ce cas peut être considéré comme correspondant à celui de la terre lorsque deux points du sol sont en communication avec des électrodes maintenues à des potentiels égaux en valeurs absolues et de signes contraires.

219. Distribution de l'électricité sur les conducteurs linéaires. — Lorsque le régime est permanent, la densité étant nulle à l'intérieur des conducteurs (**203**), le potentiel est dû uniquement à l'électricité qui existe sur la surface; cette couche électrique est distribuée suivant une loi qu'on peut déterminer dans quelques cas simples.

Considérons un fil cylindrique rectiligne, de diamètre très petit par rapport à sa longueur, et placé, sur toute son étendue, dans des conditions identiques par rapport aux conducteurs voisins. Si ce fil était électrisé et en équilibre, la distribution de la couche superficielle, à quelque distance des extrémités, serait uniforme, c'est-à-dire que toute portion de surface comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe et

à l'unité de distance porterait une même quantité d'électricité : soit λ cette quantité qu'on peut appeler la densité linéaire du fil.

Le potentiel V du fil est d'ailleurs proportionnel à la charge totale et, par suite, à la charge de chaque unité de longueur. On a donc

$$V = A\lambda,$$

A étant une constante qui dépend de la section du fil et de la position des conducteurs extérieurs.

Supposons maintenant qu'à partir d'un point P, où la densité est égale à λ, on fasse croître cette densité d'un côté, et décroître de l'autre, suivant une même progression arithmétique. Le potentiel en P n'aura pas changé et sera toujours $A\lambda$, puisque les masses enlevées d'un côté ont été reportées de l'autre à la même distance. Ainsi, quand la densité varie en progression arithmétique, le long du conducteur linéaire et rectiligne, *le potentiel en chaque point est proportionnel à la densité qui existe en ce point.*

Inversement, si le potentiel varie en progression arithmétique, la densité varie suivant la même loi, puisqu'il n'y a qu'une solution au problème de la propagation.

Dans le cas d'un fil rectiligne d'une grande longueur, par lequel un courant permanent se propage en suivant la loi d'Ohm, la densité linéaire varie donc comme le potentiel, en progression arithmétique.

Il est facile de voir qu'il en sera de même toutes les fois que la loi de distribution, quelle qu'elle soit d'ailleurs, ne variera pas d'une manière trop brusque dans le voisinage du point P. Dans ce cas, en effet, la courbe représentative de la densité se confondra avec sa tangente sur une étendue assez grande, de part et d'autre du point P, pour que l'action des masses situées au delà puisse être considérée comme négligeable.

La proportionnalité des densités aux potentiels cesserait évidemment si le fil était recourbé sur lui-même, mais on peut la considérer en général comme sensiblement exacte. Elle est surtout vraie pour les câbles où le fil conducteur est

entouré d'une couche diélectrique d'épaisseur constante enveloppée elle-même d'un conducteur en communication avec le sol. Les différentes portions du fil sont alors sans action appréciable les unes sur les autres et le potentiel en chaque point est dû seulement aux masses électriques les plus voisines. Si on appelle γ la capacité de l'unité de longueur du fil, c'est-à-dire la charge qui correspondrait à un pótentiel égal à l'unité, la charge d'une longueur dx au potentiel V sera égale à $\gamma V dx$.

220. — Propagation dans un fil avec perte par la surface. — Considérons encore un fil cylindrique traversé par un courant et supposons le régime permanent établi, mais avec déperdition d'électricité par la surface. Le flux n'est plus parallèle à l'axe dans toute l'étendue d'une section normale ; il tend à devenir perpendiculaire au fil au voisinage immédiat de la surface extérieure. Les surfaces de niveau S, S' (fig. 55)

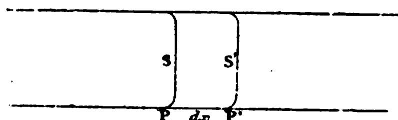


Fig. 55

sont encore planes dans leur plus grande étendue, mais elles s'infléchissent sur les bords pour se raccorder finalement avec la surface extérieure du fil.

La perte qui a lieu par la surface n'est autre chose qu'un flux d'électricité dans le milieu extérieur; elle est donc proportionnelle au flux de force électrique (**201**). Pour une longueur dx du fil, la charge est $\gamma V dx$ et le flux de force électrostatique $4\pi\gamma V dx$. En appelant c' le coefficient de conductibilité du milieu, l'intensité du courant latéral serait donc $c' 4\pi\gamma V dx$. Comme cette intensité est aussi égale au quotient du potentiel V par la résistance du milieu depuis la surface latérale considérée jusqu'aux points où le potentiel est nul, la résistance relative à la longueur dx est $\frac{1}{4\pi c' \gamma dx}$ et la résistance ρ' par unité de longueur est égale à $\frac{1}{4\pi c' \gamma}$.

Le régime permanent étant établi, le flux total d'électricité qui pénètre par la surface S de l'élément de volume de longueur dx doit être égal à la somme des flux qui sortent par la surface opposée S' et par la surface latérale, ce qui donne

$$-cS\frac{dV}{dx} = -cS\left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}dx\right) + \frac{1}{\rho'}V\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{cS\rho'}V.$$

Le produit cS représente aussi l'inverse de la résistance ρ du fil par unité de longueur; en posant $\beta^2 = \frac{1}{cS\rho'} = \frac{\rho}{\rho'}$, il vient

$$(7) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} - \beta^2 V = 0.$$

C'est l'équation de Fourier relative à la propagation de la chaleur dans une barre cylindrique. L'intégrale de cette équation peut être mise sous la forme

$$V = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}.$$

Pour déterminer les constantes A et B, il suffit de connaître les potentiels V_0 et V_1 en deux points P_0 et P_1 situés à une distance l. Le potentiel en un point P, situé à une distance x de P_0 et $l-x$ ou y de P_1, a pour valeur

$$(8) \qquad V = V_0\frac{e^{\beta y} - e^{-\beta y}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}} + V_1\frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}.$$

Si le point P_1 est au sol, on a $V_1 = 0$, ce qui donne

$$(9) \qquad V = V_0\frac{e^{\beta y} - e^{-\beta y}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}.$$

Si le fil est indéfini, la constante A est nulle, et il vient

$$V = V_0 e^{-\beta x}.$$

221. — L'intensité du courant dans le fil a pour expression

$$(10)\qquad I = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{dV}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\rho\rho'}}\,\frac{V_0(e^{\beta y}+e^{-\beta y}) - V_1(e^{\beta x}+e^{-\beta x})}{e^{\beta l}-e^{-\beta l}};$$

elle devient, si le point P_1 communique au sol,

$$(11)\qquad I = \frac{V_0}{\sqrt{\rho\rho'}}\cdot\frac{e^{\beta y}+e^{-\beta y}}{e^{\beta l}-e^{-\beta l}},$$

et, si le fil est indéfini,

$$I = \frac{V_0}{\sqrt{\rho\rho'}} e^{-\beta x} = I_0 e^{-\beta x},$$

en appelant I_0 l'intensité à l'origine du fil.

222. Résistance d'un conducteur dans le cas d'une déperdition latérale. — D'après l'équation (11), la résistance totale opposée au courant électrique depuis le point P_0 jusqu'au sol, en tenant compte des dérivations, a pour expression

$$R = \sqrt{\rho\rho'}\,\frac{e^{\beta l}-e^{-\beta l}}{e^{\beta y}+e^{-\beta y}}.$$

Considérons, comme problème plus général, un fil dont différents points P_1, P_2, P_3, ... sont réunis au sol par des conducteurs de résistance ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... Appelons R_1 la résistance totale depuis le point P_1 jusqu'au sol, P_2 la résistance à partir du point P_2, ...; enfin r_1, r_2, r_3, ... les résistances du fil entre les points de contact successifs P_1P_2, P_2P_3, .., etc. A partir du point P_1 la conductibilité totale est égale à la somme des conductibilités que présentent les différents chemins, ce qui donne l'équation

$$(12)\qquad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{r_1 + R_2}.$$

On aurait une suite d'équations analogues, et finalement

$$(13)\qquad \frac{1}{R_1}=\frac{1}{\rho_1}+\cfrac{1}{r_2+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\rho_2}+\cdots\cdots+\cfrac{1}{\cfrac{1}{\rho_n}+\cfrac{1}{r_n+R_{n+1}}}}}.$$

C'est le cas des fils télégraphiques aériens quand on veut tenir compte de la dérivation par les poteaux. Si la dérivation est continue, et qu'on appelle R la résistance à partir du point P, $R+dR$ la résistance à partir du point voisin P' à la distance dx, les coefficients ρ et ρ' ayant les mêmes significations que plus haut, l'équation (12) devient

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\frac{\rho'}{dx}}+\frac{1}{\rho dx+R+dR},$$

ou

$$\frac{dR}{R^2-\rho\rho'}=\frac{dx}{\rho'}.$$

L'intégrale de cette équation est

$$(14)\qquad \frac{R-\sqrt{\rho\rho'}}{R+\sqrt{\rho\rho'}}=\frac{1}{C}e^{-2\beta x}.$$

La constante C est déterminée par les conditions limites. Si la résistance dans le milieu extérieur à partir de l'extrémité du fil P_1 est égale à R_1, on obtient en faisant $x=l$,

$$C=\frac{R_1+\sqrt{\rho\rho'}}{R_1-\sqrt{\rho\rho'}}e^{2\beta l}.$$

CHAPITRE DEUXIÈME

RÉGIME VARIABLE

228. Application des formules de Fourier. — Le problème de la propagation de l'électricité dans un conducteur, lorsqu'on n'atteint pas un régime permanent, par exemple dans le cas de la décharge d'une batterie par un fil, présente de grandes difficultés.

Le flux d'électricité qui pénètre dans un élément de volume n'est pas nul, puisque la charge est variable avec le temps; mais on ne peut plus dire à priori si la densité intérieure varie, ou bien si elle reste encore nulle, l'accroissement de la charge se faisant seulement à la surface.

En l'absence de données expérimentales suffisantes, l'idée la plus simple est de poursuivre l'analogie entre la propagation de la chaleur et celle de l'électricité, et d'essayer l'application des formules de Fourier à l'état variable des conducteurs. C'est admettre implicitement que le flux d'électricité est en chaque point proportionnel à la force électrique en ce point, ou à la dérivée du potentiel de toutes les masses agissantes. Cette proposition paraît assez naturelle s'il est vrai que les forces électriques agissent réellement à distance et d'une manière instantanée, comme on l'admet volontiers pour l'attraction universelle; mais, si les actions électriques se transmettent au contraire par l'intermédiaire du milieu ambiant, en vertu de ce que nous avons appelé l'*élasticité électrique* de ce milieu, il est nécessaire d'admettre que l'état de tension électrique (**99**, **126**) s'établit de proche en proche. Un

effet physique de cette nature doit nécessairement exiger un temps fini, quelque faible qu'il soit. Cette question du temps, qui ne joue aucun rôle dans tous les problèmes d'équilibre ou de régime permanent, pourra avoir un effet prédominant dans les phénomènes de l'état variable.

On peut admettre, en d'autres termes, que la force électrique se propage avec une vitesse extrêmement grande, mais non infinie, ou bien que le potentiel d'une masse électrique se propage lui-même avec une vitesse finie.

Dans ce cas, il est possible encore que le flux d'électricité en chaque point soit proportionnel à la force électrique actuelle, mais cette force ne dépendra pas uniquement de la position des masses agissantes, elle dépendra aussi de la vitesse de ces masses, et les effets pourront être très différents suivant que la vitesse de déplacement des masses agissantes sera ou non du même ordre de grandeur que la vitesse de propagation des potentiels.

Enfin nous verrons, à propos des phénomènes d'induction électrodynamique, que le déplacement des courants électriques et leurs changements d'intensité produisent des forces électromotrices nouvelles, qu'il est possible de calculer dans un certain nombre de cas, et qui peuvent modifier beaucoup les résultats relatifs au régime variable.

Les deux effets que nous venons de signaler sont peut-être produits par le même mécanisme; nous n'en tiendrons pas compte pour le moment.

Sous le bénéfice de ces réserves, nous pouvons encore appliquer les formules de Fourier. De toute façon, les résultats auxquels elles conduisent doivent être d'autant plus voisins de la vérité que les modifications de l'état variable sont plus lentes; en fait, ces résultats représentent d'une manière très approchée la propagation de l'électricité dans les câbles sous-marins et s'appliquent en toute rigueur aux expériences de Gaugain sur la propagation dans les corps très résistants, comme des fils de coton ou des colonnes d'huile.

224. Etat variable dans un conducteur cylindrique. — Considérons donc, dans un conducteur cylindrique, l'élément de volume de longueur dx compris entre deux sections infini-

ment voisines S et S' (fig. 55). Le potentiel en un point P n'est plus une simple fonction de x, c'est-à-dire de la position de ce point, mais aussi une fonction du temps t. Pendant le temps dt, le gain d'électricité de cet élément de volume est égal à l'excès du flux qui pénètre par la section S sur le flux qui sort par la section S' et la perte par la surface extérieure, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx\,dt - \frac{1}{\rho'}V\,dx\,dt = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho'}V\right]dx\,dt.$$

L'accroissement de charge $\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho'}V\right)dt$ par unité de longueur produira une variation de potentiel dV ou $\frac{\partial V}{\partial t}dt$; on aura donc, en admettant que le rapport de la charge au potentiel reste égal à la capacité, comme dans les phénomènes d'électricité statique ou de régime permanent, c'est-à-dire que la charge nouvelle se porte entièrement à la surface,

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{\rho'}V = \gamma\frac{\partial V}{\partial t}.$$

En posant $\alpha^2 = \gamma\rho$, l'équation devient

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial V}{\partial t} - \beta^2 V = 0.$$

Si la perte par la surface est négligeable, le coefficient β^2 est nul et il reste

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Remarquons d'ailleurs que, si la perte n'est pas nulle, on peut poser

$$V = Ue^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}t} = Ue^{-\frac{t}{\gamma\rho'}};$$

l'équation (1) prend la forme de l'équation (2) et devient

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha^2 x^2}{t} = \frac{\alpha'^2 x'^2}{t'},$$

les potentiels V et V' satisfont à la même équation différentielle (2) et aux mêmes conditions limites; ils représentent donc la même fonction de x et de t.

227. — Ainsi, pour des fils indéfinis, ce qui dans la pratique équivaut à des fils assez longs pour que la durée de la propagation ait une valeur sensible, le potentiel V ne change pas lorsque le rapport $\frac{\alpha^2 x^2}{t}$ conserve la même valeur; c'est donc une fonction de ce rapport.

Il en résulte déjà cette conséquence établie plus haut (**226**) que le temps nécessaire pour provoquer à la distance x un potentiel déterminé, ou, plus exactement, une fraction déterminée du potentiel à l'origine, est proportionnel au carré de la distance et au coefficient α^2 qui caractérise le fil.

Dans ces conditions, l'équation (2) ne renferme réellement qu'une variable indépendante et, en posant

$$\frac{\alpha^2 x^2}{4t} = z^2,$$

elle devient

$$\frac{d^2V}{dz^2} + 2z\frac{dV}{dz} = 0;$$

on en déduit aisément

$$V = A\int_0^z e^{-z^2}dz + B.$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales. Pour $z=0$, c'est-à-dire $x=0$ ou $t=\infty$, on a $V=V_0$; pour $z=\infty$, c'est-à-dire $x=\infty$ ou $t=0$, on a $V=0$.

Il vient alors

$$\frac{V}{V_0} = 1 - \frac{\int_0^z e^{-z^2}dz}{\int_0^\infty e^{-z^2}dz}.$$

L'intégrale que renferme cette formule n'a pas d'expression simple, mais elle se présente dans un grand nombre de problèmes, par exemple dans la théorie des probabilités, et on en a calculé les tables, de sorte qu'elle est bien connue comme valeurs numériques.

Entre les limites o et ∞, en particulier, elle est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce qui donne

$$(6) \qquad \frac{V}{V_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz.$$

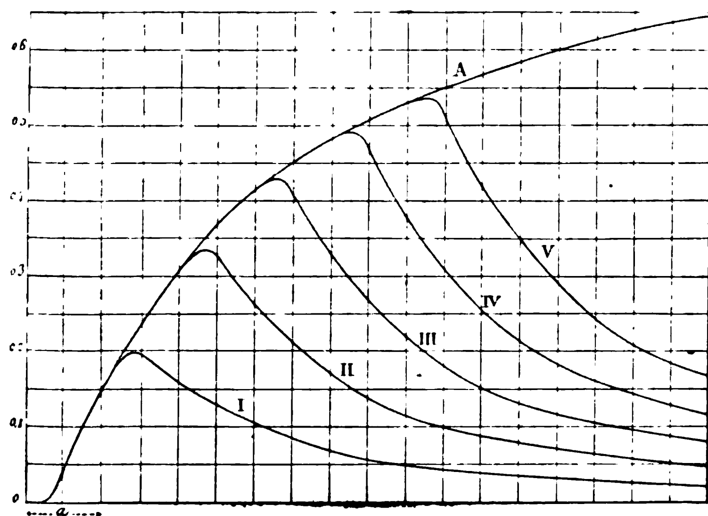


Fig. 56

La courbe A (fig. 56) représente les valeurs du rapport des potentiels $\frac{V}{V_0}$ en fonction de t en prenant $a = \frac{\alpha^2 x^2}{4} = z^2 t$. L'ordonnée reste d'abord quelque temps nulle au voisinage de l'origine et ne commence à prendre une valeur sensible qu'à partir du moment où l'on a $t = \frac{a}{4}$. La courbe a ensuite pour asymptote une parallèle à l'axe des t à une distance de cet axe égale à l'unité.

228. — L'intensité du courant, à la distance x, a pour expression

$$I = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{V_1}{\rho}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\frac{\alpha}{2\sqrt{t}};$$

en remplaçant z^2 par $\frac{a}{t}$, il vient

$$(7) \qquad I = \frac{V_0 x}{\rho\sqrt{\pi t}}\sqrt{\frac{a}{t}}\,e^{-\frac{a}{t}}.$$

Cette intensité est une fonction du temps; elle est nulle

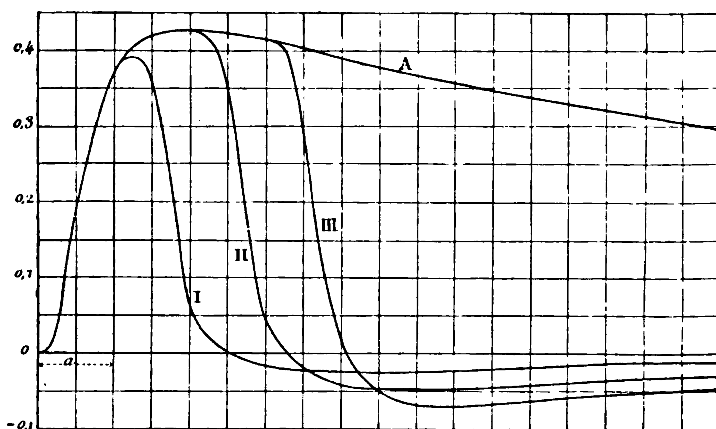


Fig. 57

pour $t = 0$ et pour $t = \infty$ et devient maximum quand on a $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$, ce qui donne $z^2 = \frac{1}{2}$. En appelant T l'époque du maximum, on a donc

$$T = 2a = \frac{\alpha^2 x^2}{2} = \frac{\gamma\rho}{2}x^2.$$

La courbe A (fig. 57) représente les valeurs de l'expression $\sqrt{\frac{a}{t}}e^{-\frac{a}{t}}$ qui est proportionnelle à l'intensité du courant. L'époque $2a$ du maximum étant proportionnelle à $\alpha^2 x^2$, on voit

que la courbe est d'autant plus inclinée que la distance x du point considéré à l'origine est plus grande.

229. Contacts momentanés. — Supposons qu'on n'établisse à l'origine du fil qu'un contact momentané avec une source à potentiel constant, c'est-à-dire que cette extrémité ne soit portée au potentiel V_0 que pendant un temps très court τ et ensuite reliée avec le sol.

Le potentiel en un point quelconque s'obtiendra en superposant deux états, le premier dû au potentiel permanent V_0 établi à l'origine du fil au commencement du temps, le second au potentiel permanent $-V_0$ établi seulement à l'époque τ. La valeur du potentiel à la distance x relative à chacun des états est une même fonction du temps écoulé depuis l'établissement, à l'origine du fil, du potentiel correspondant; le potentiel résultant U est donc égal à $V(t)-V(t-\tau)$. Si l'on suppose le temps τ infiniment petit, il vient

$$U = V(t) - V(t-\tau) = \tau\frac{\partial V}{\partial t} = \tau\frac{dV}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}.$$

On en déduit

$$\frac{U}{V_0} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\frac{z}{t} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\sqrt{a}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{a}{t}} = \frac{\tau}{a}\frac{1}{\sqrt{\pi}}z^3e^{-z^2}.$$

La valeur de U n'est plus alors une simple fonction de z^2. En représentant par φ la fonction

$$\varphi = \frac{z}{t}e^{-z^2} = \frac{\alpha x}{2t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\alpha^2x^2}{4t}},$$

on peut écrire

$$\frac{U}{V_0} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\varphi. \tag{8}$$

230. — On peut d'ailleurs déterminer graphiquement la valeur de $\frac{U}{V_0}$ en prenant la différence des ordonnées de la courbe A (fig. 56) et d'une autre courbe identique qui aurait été déplacée vers la droite d'une quantité τ. Les courbes I, II,

III, IV, V représentent le résultat de cette superposition pour des valeurs de τ égales respectivement à a, $2a$, $3a$, $4a$, $5a$.

On voit, par cette construction et par la formule, que la communication momentanée de l'extrémité du fil avec une source à potentiel constant donne lieu à une sorte d'*onde électrique* qui se propage suivant une loi assez complexe et s'étale à mesure qu'elle se propage.

On obtiendrait de même les intensités correspondant à des contacts momentanés : les courbes I, II, III (fig. 57) représen-

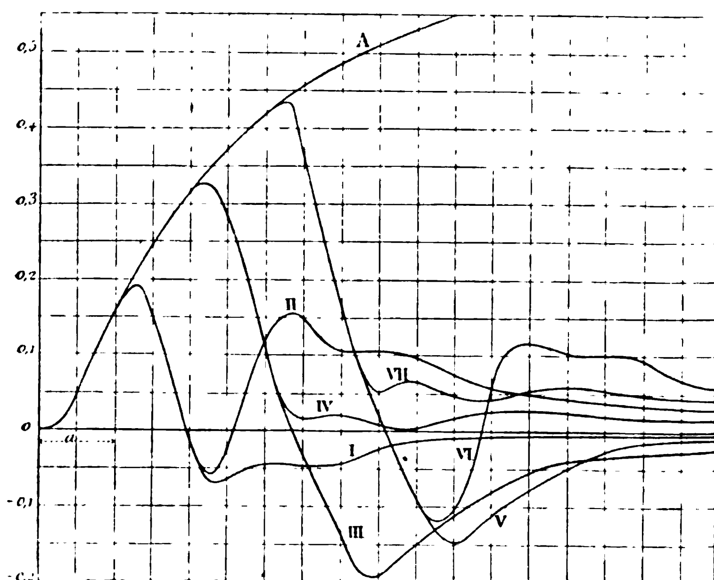


Fig. 58

tent la loi des intensités en un point pour des contacts de durées respectivement égales à a, $2a$, $3a$.

231. — L'époque T_1 du maximum de potentiel pour l'onde relative à un contact infiniment court est déterminée par la condition

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Comme on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(z^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{\varphi}{t},$$

le maximum a lieu pour $2z^2=3$, ou

$$T_1=\frac{2a}{3}=\frac{\alpha^2x^2}{6}=\frac{\gamma\rho}{6}x^2=\frac{T}{3}.$$

Ce temps T_1 correspond au point d'inflexion de la courbe A (fig. 56), puisque la condition $\frac{\partial U}{\partial t}=0$ équivaut à $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0$; il est le tiers du temps T nécessaire pour avoir en ce point l'intensité maximum, avec un potentiel constant à l'origine du fil.

Le temps T_1 peut donc être considéré comme exprimant la *durée de propagation d'une onde électrique.*

232. — On peut déterminer, de même, par une construction graphique ou par le calcul, l'onde qui résulterait de la communication alternative de l'origine du fil avec des sources à potentiels $+V_0$ et $-V_0$, pendant des temps égaux ou inégaux. Les courbes de la figure 58 correspondent ainsi de contacts alternatifs qu'on peut résumer dans le tableau suivant :

Courbes.	Durées des contacts		
	+	—	+
I	a	a	
II	a	a	a
III	$2a$	$2a$	
IV	$2a$	a	
V	$3a$	$2a$	
VI	$3a$	a	
VII	$3a$	$2a$	a

On voit qu'en choisissant les durées de ces contacts, on peut obtenir une onde beaucoup plus courte que par un contact unique. Le fil est donc rapidement amené à l'état neutre après le passage de l'onde; c'est le problème que l'on se propose de résoudre pour les transmissions télégraphiques.

Ponr construire la courbe de contact τ, il suffit d'ajouter algébriquement les ordonnées de la courbe A et d'une autre courbe $-A_\tau$ dont l'origine est déplacée de τ. La courbe rela-

tive à un contact suivant τ' de signe contraire s'obtient de même par les ordonnées des courbes $-A_\tau$ et $+A_{\tau+\tau'}$. La courbe relative aux contacts τ et τ' de signes contraires s'obtiendra donc par la somme des ordonnées des trois courbes $A - 2A_\tau + A_{\tau+\tau'}$; on évitera ainsi la construction séparée des courbes relatives aux différents contacts.

233. — Dans le cas général, le potentiel V_0 à l'origine du fil ne passe pas subitement de zéro à une valeur constante, c'est une fonction continue $F(\theta)$ du temps θ, compté à partir du moment où l'électrisation commence. L'élément dU du potentiel à la distance x et à l'époque t qui correspond au potentiel V_0 établi pendant le temps $d\theta$ et à l'époque θ à l'origine du fil est égal (**229**) à $\frac{F(\theta)}{\sqrt{\pi}}\varphi(t-\theta)\,d\theta$. Si la durée totale d'électrisation est τ, on aura donc pour le potentiel résultant

$$U = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\tau F(\theta)\,\varphi(t-\theta)\,d\theta.$$

On doit remarquer toutefois que cette expression n'a de sens que pour les valeurs de t supérieures à τ.

Si le potentiel à l'origine varie périodiquement suivant une loi simple, s'il est représenté, par exemple, par $V_0 \sin 2nt$, l'état électrique définitif du fil en chaque point varie évidemment suivant la même période. Le potentiel à la distance x peut être exprimé par la formule

$$V = V_0 A \sin(nt - bx),$$

dans laquelle b est une constante et A une fonction de x. En substituant dans l'équation (2), on trouve finalement

$$(9) \qquad V = V_0 e^{-\alpha x\sqrt{n}} \sin\left(2nt - x\alpha\sqrt{n}\right).$$

Une phase déterminée du potentiel à l'origine se transmet donc le long du fil avec une vitesse constante égale à $\frac{2\sqrt{n}}{\alpha}$.

Dans ce cas, on peut dire qu'il y a une vitesse de propagation régulière, mais cette vitesse dépend de la période d'oscillation électrique; le temps nécessaire pour parcourir une longueur déterminée est proportionnel à α, et non à α^2, comme on l'avait trouvé pour la durée de propagation relative considérée plus haut (**225**).

Si l'électrisation à l'origine suit une loi plus ou moins complexe et que l'expression du potentiel initial soit décomposable en une série de termes périodiques simples, le potentiel dans le fil sera représenté par une série d'ondes élémentaires correspondantes ; mais ces ondes se propageront avec des vitesses différentes, et il se produira une sorte de dispersion électrique analogue au phénomène que présente la propagation de la lumière dans un milieu réfringent.

234. — Supposons que le potentiel à l'origine V_0 ait alternativement des valeurs constantes égales et de signes contraires, pendant des temps très petits et égaux τ, et que l'opération soit répétée un nombre impair de fois, $2n+1$ par exemple, c'est-à-dire

$$\begin{array}{llll} +V_0 & \text{de } 0 & \text{à} & \tau, \\ -V_0 & \text{de } \tau & \text{à} & 2\tau, \\ +V_0 & \text{de } 2\tau & \text{à} & 3\tau, \\ \vdots & & \vdots & \\ +V_0 & \text{de } 2n\tau & \text{à} & (2n+1)\tau. \end{array}$$

On a alors

$$\frac{U}{V_0} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \sum_0^{2n\tau} \varphi(t-\theta).$$

Les différentes valeurs de la fonction $\varphi(t-\theta)$ sont :

$$\begin{array}{llll} \text{Pour le } 1^{\text{er}} \text{ contact} & +\varphi(t-0) & = +\varphi(t), \\ \quad — \quad 2^{\text{e}} & -\varphi(t-\tau) & = -\varphi(t)+\tau\varphi'(t), \\ \quad — \quad 3^{\text{e}} & +\varphi(t-2\tau) & = +\varphi(t)-2\tau\varphi'(t), \\ \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ \quad — \quad (2n+1)^{\text{e}} & +\varphi(t-2n\tau) & = +\varphi(t)-2n\tau\varphi'(t). \end{array}$$

Ajoutant toutes ces équations, il vient

$$\sum_0^{2n\tau} \varphi(t-\theta) = \varphi(t) - n\tau\varphi'(t) = \varphi(t)\left[1 - \frac{n\tau}{t}\left(z^2 - \frac{3}{2}\right)\right],$$

et, par suite,

$$\frac{U}{V_0} = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\varphi(t)\left[1 - \frac{n\tau}{t}\left(z^2 - \frac{3}{2}\right)\right] = \frac{\tau}{\sqrt{\pi}}\varphi(t)\left[1 + \frac{n\tau}{a}z^2\left(z^2 - \frac{3}{2}\right)\right].$$

Le maximum de la valeur de U à la distance x se produit à l'époque T_n déterminée par la condition

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

qui donne

$$\left(\frac{2a}{3} - t\right)\left[1 + \frac{3}{2}\frac{n\tau}{t}\left(\frac{2a}{3} - t\right)\right] = \frac{n\tau}{t}\left(\frac{4a}{3} - t\right).$$

Si on remplace t, dans tous les termes qui contiennent τ en facteur, par la valeur approchée $\frac{2a}{3}$ qui correspond au maximum T_1 de la première onde, il vient

$$\frac{2a}{3} - T_n = n\tau,$$

ou enfin

$$T_n = T_1 - n\tau.$$

Le temps au bout duquel a lieu le maximum diminue donc à mesure que le nombre des contacts augmente; les ondes sont ainsi raccourcies et la durée du phénomène se trouve notablement diminuée.

Une série d'un nombre impair de contacts alternatifs très courts et d'égales durées produirait donc le long du fil une perturbation de même sens mais beaucoup plus courte que celle d'un contact unique.

225. — Pour un contact de durée infiniment petite τ, le potentiel en un point à l'époque t est

$$U = V_0 \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{t} z e^{-z^2}.$$

L'intensité du courant a pour valeur

$$I = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{V_0}{\rho} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} (2z^2 - 1) e^{-z^2},$$

ou

$$(10) \qquad I = \frac{V_0}{\rho} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{2a^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{a}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2\frac{a}{t} - 1\right) e^{-\frac{a}{t}}.$$

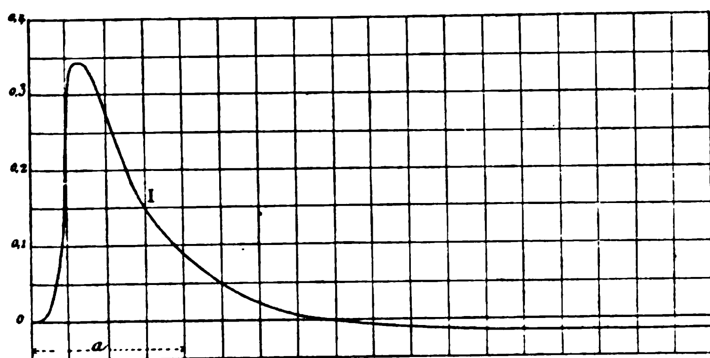


Fig. 59

On vérifie aisément que le maximum, déterminé par la condition $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$, a lieu pour

$$z^2 = \frac{a}{t} = 3, \quad \text{ou} \quad t = \frac{a}{3}.$$

La courbe I (fig. 59) représente les valeurs de l'expression

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \left(2\frac{a}{t} - 1\right) e^{-\frac{a}{t}},$$

qui est proportionnelle à l'intensité du courant.

236. Fil limité. — Pour passer au cas d'un fil OE (fig. 60) de longueur limitée l, dont l'extrémité E communique avec le sol, considérons un fil indéfini X'X et supposons sur ce fil deux séries de sources O_1, O_2 ..., O', O'', O''' .. , à des distances successives égales à $2l$; les premières O_1, O_2, ... sont identiques à la source donnée qui existe au point O, et les autres O', O'', O''', ... ont la même valeur numérique changée de signe.

Toutes ces sources, O et O', O_1 et O'', ... étant deux à deux symétriques par rapport au point E et de signes contraires, le potentiel en E sera toujours égal a zéro. De même, toutes les sources ajoutées, O_1 et O', O_2 et O'', ... sont deux à deux symétriques par rapport au point O et de signes contraires : le potentiel en ce point ne dépendra que de la source qui s'y trouve. La portion OE du fil indéfini est donc dans le même état que si elle était seule.

L'intensité du courant au point P, situé sur le fil OE à la



Fig. 60

distance x de l'origine O, est la somme algébrique des intensités qui seraient produites en ce point par toutes les sources supposées sur un fil indéfini.

Si toutes les sources sont portées au potentiel constant V_0 on aura (220), pour la portion de l'intensité due à la source O,

$$i=\frac{V_0 x}{\rho\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2x^2}{4t}}=\frac{V_0 x}{\rho\sqrt{\pi t}}f(x).$$

Pour les sources situées à gauche, il suffira, dans cette expression, de donner successivement à x les valeurs $x+2l$, $x+4l$, $\cdots x+2nl$, ... Les sources O', O'', O''', ... donneraient des courants de sens contraires aux précédentes si elles étaient au potentiel V_0, mais, comme elles ont été changées de signe, les flux d'électricité qu'elles produisent sont encore de même sens; on devra donc aussi remplacer x par $2l-x$,

$4l-x, \ldots, 2nl-x, \ldots$, ce qui donne pour l'intensité I,

$$I=\frac{V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi t}}\left[\ldots+f(4l+x)+f(2l+x)+f(x)+f(2l-x)+f(4l-x)+\ldots\right].$$

Lorsque l'on fait $x=l$, c'est-à-dire quand on considère le phénomène au point E, à l'extrémité du fil qui communique au sol, l'expression se simplifie, et l'on voit immédiatement que l'intensité est double de celle que donneraient toutes les sources de gauche. On a donc

$$I=\frac{2V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi t}}\left[e^{-\frac{\alpha^2 l^2}{4t}}+e^{-\frac{\alpha^2(3l)^2}{4t}}+e^{-\frac{\alpha^2(5l)^2}{4t}}+\ldots\ldots\right].$$

En posant $e^{-\frac{\alpha^2 l^2}{4t}}=v$, il vient

$$(11)\qquad I=\frac{2V_0\alpha}{\rho\sqrt{\pi t}}\left[v+v^{3^2}+v^{5^2}+v^{7^2}+\ldots\ldots+v^{(2n+1)^2}+\ldots\right].$$

L'intensité est nulle d'abord, puisque v est nul quand t est égal à zéro; elle croît ensuite vers la valeur limite $\frac{V_0}{\rho l}$.

La courbe représentée par cette série serait assez facile à calculer, parce que les termes vont rapidement en décroissant lorsque v diffère sensiblement de l'unité.

237. — Toutefois sir W. Thomson a résolu le problème à l'aide d'une autre série plus facile à discuter qui se déduit directement de l'équation (4) de Fourier.

D'après cette formule, l'intensité du courant à la distance x de l'origine a pour expression

$$I=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{V_0}{\rho l}\left[1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}t}\cos\frac{n\pi}{l}x\right].$$

Pour l'extrémité du fil qui communique avec le sol, $x=l$ et il vient

$$I=\frac{V_0}{\rho l}\left[1+2\sum_{n=1}^{n=\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}t}\cos n\pi\right].$$

En donnant à n les valeurs successives 1, 2, 3,..., le cosinus prend alternativement des valeurs égales à -1 et $+1$. Si l'on pose, pour abréger,

$$u = e^{-\frac{\pi^2 t}{a^2 l^2}},$$

on obtient

$$(12) \quad I = \frac{V_0}{\rho l}\left[1 - 2(u - u^4 + u^9 - \ldots\ldots \mp u^{n^2} \ldots\ldots)\right] = F(t).$$

Pour des valeurs de t très petites, u tend vers l'unité, la série comprise entre parenthèses est égale à $\frac{1}{2}$ et l'intensité

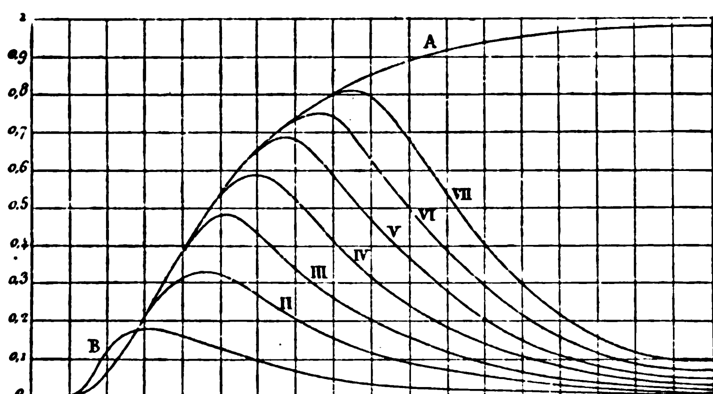


Fig. 61

du courant nulle. A mesure que le temps augmente, u diminue, la série tend vers zéro, et l'intensité du courant croît jusqu'à la valeur limite $\frac{V_0}{\rho l}$. La série est d'ailleurs facile à calculer : d'après sir W. Thomson, elle ne diffère d'une manière appréciable de sa valeur maximum qu'à partir du moment où u est supérieur à $\frac{3}{4}$. En appelant a' l'époque à laquelle cette valeur est atteinte, on a

$$\frac{3}{4} = e^{-\frac{\pi^2 a'}{a^2 l^2}}, \qquad \text{ou} \qquad a' = \frac{\alpha^2 l^2}{\pi^2} l.\left(\frac{4}{3}\right).$$

On peut écrire alors

$$u = e^{-\frac{\pi^2 a'}{\alpha^2 l^2}\cdot\frac{t}{a'}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{a'}}.$$

La courbe A (fig. 61) représente, en fonction du temps et en prenant pour unité l'intensité finale, la courbe de l'intensité du courant produite à l'extrémité du fil qui communique au sol par un potentiel constant établi a l'autre extrémité.

238. Contacts momentanés. — Pour obtenir l'intensité qui correspond à la communication du fil avec une source à potentiel constant V_0 pendant un temps τ, il suffirait, comme pour le cas du fil isolé, de calculer l'expression

$$I_\tau = F(t) - F(t-\tau),$$

ou de construire géométriquement la courbe dont l'ordonnée en chaque point est égale à la différence des ordonnées des deux courbes $F(t)$ et $F(t-\tau)$.

Les courbes II, III, IV, V, VI, VII (fig. 61), représentent ainsi les intensités qui proviennent de contacts dont les durées sont respectivement égales à $2a'$, $3a'$, ..., $7a'$. Le phénomène se présente encore comme une onde électrique ou une impulsion momentanée à l'extrémité du fil.

Si la durée du contact est infiniment petite, la courbe d'arrivée de l'intensité est représentée par l'équation

$$i = \tau\frac{dF}{dt} = \tau\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dt},$$

qui donne

$$i = \tau\frac{2V_0}{\rho l}\cdot\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2}(u - 4u^4 + 9u^9 - \cdots \mp n^2 u^{n^2} \pm \cdots).$$

Cette intensité est représentée par la courbe B (fig. 61). Elle est maximum lorsqu'on a $\frac{di}{dt} = 0$, c'est-à-dire

$$u - 16u^4 + 81u^9 \cdots\cdots \mp n^4 u^{n^2} \cdots\cdots = 0,$$

équation qui donne sensiblement

$$u = \left(\frac{3}{4}\right)^3, \quad \text{ou} \quad t = 3a'.$$

239. — Enfin, pour raccourcir les ondes à l'arrivée et décharger le fil, on pourra encore mettre l'origine du fil alternativement à des potentiels égaux et de signes contraires.

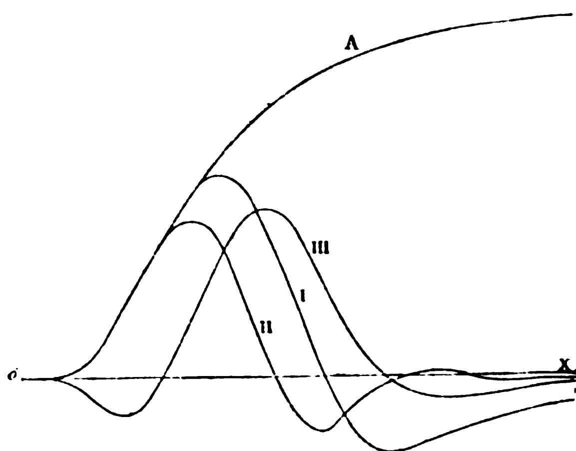


Fig. 62

pendant des temps égaux ou inégaux, en la reliant avec l'un des pôles d'une pile.

Les courbes I, II et III de la figure 62 représentent les ondes d'arrivée des contacts alternatifs suivants :

Courbes.	Durées des contacts.			
	+	−	+	−
I	$4a'$	$4a'$		
II	$3a'$	$3a'$	a'	
III		a'	$4a'$	$2a'$

Sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, pour le moment, sur cette question importante, on voit quelle est la

nature du problème et quelles sont les méthodes que l'on peut utiliser pour accélérer la transmission des signaux dans les câbles électriques.

240. Emploi des condensateurs. — Ajoutons encore que, dans la pratique, on a trouvé très avantageux de maintenir le câble constamment isolé en reliant chacune de ses extrémités avec un condensateur. La pile de charge électrise l'une des armatures du condensateur, placé au poste de départ; l'autre armature, qui communique avec le câble, s'électrise en signe contraire, et un flux de même signe que celui qu'aurait donné la pile se porte sur la première armature du condensateur situé à l'autre bout. La seconde armature de ce condensateur communique, par exemple, avec un électromètre, ou est reliée au sol par un galvanomètre.

Si le contact à l'origine est continu, l'électromètre tend vers une déviation maximum; le galvanomètre donne une déviation croissante d'abord et revient ensuite au zéro, de sorte que, même pour un contact permanent, le phénomène se présente déjà sous la forme d'une onde électrique. On conçoit aisément, d'après cela, que des contacts momentanés et alternatifs convenablement choisis peuvent produire des ondes notablement plus courtes que si le fil eût été électrisé directement par la pile de charge.

241. Propagation dans les diélectriques. — Les conséquences de la formule de Fourier appliquée à l'état variable trouvent leur vérification, comme on l'a déjà dit, pour les bons conducteurs dans les phénomènes que présentent les câbles transatlantiques et, pour les conducteurs médiocres, dans les expériences de Gaugain. La formule paraît donc générale et on est conduit à l'appliquer aux diélectriques, qui ne sont jamais, d'une façon absolue, dénués de conductibilité.

Un diélectrique soumis à l'action d'une force électromotrice peut être considéré comme étant à la fois le siège d'un phénomène de polarisation et d'un phénomène de conduction soumis aux lois ordinaires.

Supposons le diélectrique isotrope et soient μ son pouvoir inducteur et c son coefficient de conductibilité. L'équation générale de l'induction (**116**) appliquée à un élément de volume

dv situé en un point où la densité est ρ donne

$$\mu\Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

D'un autre côté, la variation de la charge $c\Delta V dv dt$ de l'élément pendant le temps dt produit un accroissement correspondant de densité, ce qui donne l'équation

$$c\Delta V = \frac{d\rho}{dt};$$

on en déduit

$$\Delta V = -4\pi\frac{\rho}{\mu} = \frac{1}{c}\frac{d\rho}{dt},$$

et, par suite,

$$\rho = Ae^{-\frac{4\pi c}{\mu}t} = Ae^{-\frac{t}{T}},$$

en posant $T = \frac{\mu}{4\pi c}$.

Cette équation montre que la densité ρ décroît d'une manière continue, et, par suite, que si, pour une cause quelconque, le diélectrique a reçu une charge intérieure, il ne la gardera pas indéfiniment; cette charge finira toujours par être purement superficielle, comme celle d'un bon conducteur, résultat évident *à priori*.

242. Résidus des condensateurs. — Les phénomènes d'absorption et de charges résiduelles auxquels donnent lieu les diélectriques ne sauraient être considérés comme des effets de leur conductibilité propre. Examinons, en effet, à ce point de vue, la suite des phénomènes auxquels donnent lieu la charge ou la décharge d'un condensateur.

Soient C la capacité du condensateur, R la résistance du diélectrique, E la différence de potentiel des deux armatures à l'instant t, r la résistance du circuit qui réunit extérieurement les deux armatures, E_0 la force électromotrice d'une source intercalée dans ce circuit. L'accroissement de charge CdE du condensateur pendant le temps dt est égal à l'excès du flux d'électricité $\frac{E_0 - E}{r}dt$ fourni par la source sur le flux

$\frac{E}{R}dt$ qui traverse le diélectrique. Il en résulte l'équation

$$\frac{E_0 - E}{r} - \frac{E}{R} = C\frac{dE}{dt}, \tag{13}$$

et, par suite,

$$E = E_0 \frac{R}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right),$$

en posant $T_1 = \frac{CRr}{R+r}$.

Supposons qu'à l'instant t_1 on rompe le circuit et qu'on abandonne l'appareil à lui-même pendant un temps t_2, l'équation (13) se réduit à

$$0 = \frac{E}{R} + C\frac{dE}{dt};$$

en désignant par E_1 la différence du potentiel qui existait au temps t_1 entre les armatures, par E_2 celle qui existe à l'instant $t_1 + t_2$ et posant $T_2 = CR$, on a

$$E_2 = E_1 e^{-\frac{t_2}{T_2}}.$$

Supposons enfin qu'on décharge le condensateur en réunissant les deux armatures par un conducteur de faible résistance ρ, on aura l'équation

$$\frac{E}{\rho} + \frac{E}{R} = -C\frac{dE}{dt},$$

et, au bout d'un temps t_3, c'est-à-dire à l'époque $t_1 + t_2 + t_3$,

$$E_3 = E_2 e^{-\frac{t_3}{T_3}}, \qquad \text{avec} \qquad T_3 = \frac{CR\rho}{R+\rho}.$$

La perte totale du condensateur pendant le temps t_3 est $C(E_2 - E_3)$; la portion qui traverse le circuit extérieur et con-

stitue la décharge Q est égale à $C(E_2 - E_3)\frac{R}{R+\rho}$, ce qui donne finalement

$$Q = E_0 \frac{CR^2}{(R+r)(R+\rho)}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}}\right) e^{-\frac{t_2}{T_2}}\left(1 - e^{-\frac{t_3}{T_3}}\right).$$

Pour avoir la décharge complète, il suffit de faire $t_3 = \infty$; on voit qu'on arrive à cette décharge complète d'une manière continue et sans aucune des alternatives auxquelles donnent lieu les condensateurs.

Maxwell a montré qu'un système formé de couches diélectriques parallèles, et même d'éléments diélectriques différents mêlés d'une manière quelconque, est capable de donner lieu à des charges résiduelles, bien que chacun des diélectriques constituants soit dénué de cette faculté. Mais le défaut d'homogénéité ne paraît pas être la seule cause du phénomène, et l'expérience montre que l'existence des charges résiduelles doit être attribuée, dans le plus grand nombre des cas, à une espèce de déformation élastique qui serait la suite de la polarisation du diélectrique. Il est, en effet, à remarquer que toutes les actions, telles que des chocs répétés, des vibrations, des variations brusques et en sens contraires de la température, qui facilitent le retour à l'état normal d'un corps qui a subi une déformation élastique permanente, hâtent également l'apparition des charges résiduelles et le retour à l'état naturel.

La propagation de la chaleur ne donne lieu à aucun phénomène que l'on puisse rapprocher de la charge résiduelle des diélectriques, et, sous ce rapport, l'analogie, si grande d'ailleurs, des deux ordres de phénomènes paraît complètement en défaut.

CHAPITRE TROISIÈME

ÉNERGIE DES COURANTS

243. Dégagement de chaleur. — Lorsqu'un système de conducteurs électrisés éprouve une modification quelconque, sans l'intervention d'aucune force extérieure, l'énergie électrique dans le second état est nécessairement moindre que dans le premier. L'énergie perdue pendant la transformation peut être utilisée sous une autre forme équivalente, telle qu'un travail mécanique, l'élévation d'un poids, l'accroissement de force vive d'un système, un changement d'état physique, une opération chimique ou enfin un dégagement de chaleur.

Pour toute transformation infiniment petite du système considéré, la perte d'énergie est égale à la somme des produits de chacune des masses électriques par la différence des valeurs du potentiel aux points qu'elle occupe avant et après la transformation. Dans le cas d'un courant permanent, le potentiel est invariable en chaque point, malgré le mouvement continu d'électricité ; il en résulte que l'énergie perdue dans une partie quelconque des conducteurs est simplement proportionnelle au temps.

Considérons deux points A et B maintenus respectivement aux potentiels V_1 et V_2, et, sur les surfaces de niveau qui passent en A et B, deux portions S_1 et S_2 correspondantes, c'est-à-dire découpées par un même tube de flux. La quantité d'électricité qui traverse ces deux surfaces est la même ; l'énergie perdue par le courant dans cet intervalle pendant l'unité de temps est égale au produit de la masse d'électricité qui s'é-

coule, c'est à-dire de l'intensité I du courant, par la chute du potentiel $V_1 - V_2$, si le courant va de A en B, c'est-à-dire par la force électromotrice E qui existe entre ces deux points. On a donc, pour la mesure de l'énergie perdue,

$$W = I(V_1 - V_2) = IE.$$

Nous admettrons comme un fait expérimental qu'aucune partie de cette énergie n'est employée à changer la force vive des masses électriques. Le fait est évident si les surfaces S_1 et S_2 sont égales, puisqu'alors les vitesses sont les mêmes à l'entrée et à la sortie du tube. Pour le cas général, nous avons déjà fait remarquer que le flux est en chaque point parallèle à la force et que, par suite, aucun effet attribuable à l'inertie des masses électriques ne paraît intervenir dans les phénomènes de régime permanent.

Si, d'un autre côté, le conducteur est immobile, au moins dans son ensemble, et, enfin, si le courant ne produit aucun travail mécanique extérieur, l'énergie est nécessairement utilisée dans le conducteur lui-même.

244. Loi de Joule. — Deux cas peuvent se présenter : ou bien la chute de potentiel entre les points A et B est continue et s'effectue suivant la loi d'Ohm; ou bien il se trouve quelque part, dans l'intervalle de ces points, deux surfaces voisines entre lesquelles existe une chute brusque de potentiel, constante et indépendante de l'intensité du courant, c'est-à-dire une force électromotrice constante H. La manière dont l'énergie électrique se dépense le long du conducteur dépend de la loi de variation de potentiels et n'est pas identique dans les deux cas. Partout où la variation de potentiel est continue, l'énergie se dépense d'une manière continue; elle se transforme en énergie calorifique et donne lieu à un dégagement de chaleur le long du conducteur. Là où existe une chute brusque de potentiel, il y a une variation brusque de l'énergie électrique qui se traduit soit par un phénomène calorifique soit par tout autre effet physique équivalent.

Considérons d'abord le premier cas et supposons qu'il n'y ait pas de variations de potentiel indépendantes du courant. Si

R est la résistance du conducteur entre deux points A et B, la loi d'Ohm donne

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{E}{R}.$$

L'expression de l'énergie dépensée entre les deux points est donc

$$W = IE = I^2R = \frac{E^2}{R}.$$

Ainsi, *l'énergie calorifique dégagée sur le conducteur pendant l'unité de temps est égale au produit du carré de l'intensité du courant par la résistance du conducteur.* Si l'on appelle Q la quantité de chaleur, telle qu'on peut la mesurer par les procédés calorimétriques, et J l'équivalent mécanique de la calorie, on a donc

$$I^2R = JQ.$$

La quantité de chaleur dégagée est proportionnelle à la résistance du conducteur et au carré de l'intensité du courant.

C'est la *loi de Joule.*

245. Relation des lois d'Ohm et de Joule. — On peut arriver à ce résultat par une autre voie :

Considérons un conducteur de capacité C, une batterie par exemple, électrisé au potentiel V : l'énergie potentielle a pour valeur (**89**)

$$W = \frac{1}{2} MV = \frac{1}{2} CV^2.$$

Supposons que cette batterie soit reliée au sol par un fil d'une résistance R assez grande pour que la décharge ait une durée appréciable. Pendant le temps dt, il s'écoule une masse d'électricité dM, et le potentiel diminue de dV; on a

$$dM = Idt = CdV,$$

et la perte d'énergie pendant le même temps est

$$dW = CVdV = VdM = IVdt.$$

La loi d'Ohm est applicable si l'intensité du courant reste sensiblement constante pendant le temps dt; il en résulte

$$I = \frac{V}{R},$$

et

$$\frac{dW}{dt} = IV = I^2R = \frac{V^2}{R},$$

c'est-à-dire que l'énergie dépensée pendant l'unité de temps est exprimée par la loi de Joule.

Nous venons de déduire la loi de Joule du principe de la conservation de l'énergie et de la loi d'Ohm. On pourrait inversement déduire la loi d'Ohm du même principe combine avec la loi de Joule. En effet, la loi de Joule donne

$$W = I^2R.$$

On a d'ailleurs

$$W = EI;$$

il en résulte

$$E = IR,$$

c'est-à-dire la loi d'Ohm.

246. — Nous ferons remarquer que, dans un circuit complexe qui ne renferme pas de forces électromotrices localisées, *la quantité de chaleur développée est un minimum lorsque la distribution des intensités est régie par la loi d'Ohm.*

Imaginons, par exemple, qu'il existe entre les points A et B, aux potentiels V_1 et V_2, une série d'arcs conducteurs (fig. 52). Soit R la résistance de l'un d'eux et I l'intensité déduite de la loi d'Ohm, c'est-à-dire telle qu'on ait $IR = V_1 - V_2 = E$, et supposons que par une altération du régime l'intensité dans ce conducteur devienne $I + i$.

La quantité totale de chaleur développée dans le nouveau système aura pour expression

$$\sum R(I+i)^2 = \sum RI^2 + 2\sum RIi + \sum Ri^2;$$

mais le produit RI est une constante pour chacun des arcs, et, d'autre part, $\sum i$ est nécessairement nul si le courant qui aboutit au point A n'est pas modifié; la quantité de chaleur se réduit donc à

$$\sum RI^2 + \sum Ri^2,$$

et elle est évidemment minimum pour $i = 0$, c'est-à-dire quand l'intensité se partage sur tous les arcs d'après la loi d'Ohm.

247. Phénomène de Peltier. — Supposons maintenant qu'entre les deux points A et B, toujours maintenus aux mêmes potentiels V_1 et V_2, la valeur du potentiel au lieu de varier proportionnellement aux résistances, éprouve en un point P entre deux surfaces voisines une chûte brusque $U_1 - U_2 = H$ indépendante de l'intensité du courant; cette intensité n'aura plus la même expression que dans le cas précédent.

En appelant R_1 et R_2 les résistances des deux portions AP et PB, on a alors (**210**)

$$I = \frac{V_1 - U_1}{R_1} = \frac{U_2 - V_2}{R^2} = \frac{V_1 - V_2 - (U_1 - U_2)}{R_1 + R_2} = \frac{E - H}{R}.$$

L'énergie totale dépensée entre les points A et B est

$$W = I(V_1 - V_2) = IE,$$

ce qui donne

$$W = I(IR + H) = I^2R + IH.$$

Cette énergie se compose donc de deux parties: l'une, proportionnelle au carré de l'intensité et qui échauffe le conducteur dans toute la longueur, correspond à la loi de Joule; l'autre, proportionnelle à l'intensité, est localisée au point P. Cette dernière partie est positive, si la chûte se fait dans le sens du courant, et négative dans le cas contraire. S'il n'y a pas d'autre travail que celui qui correspond aux changements de température, cette énergie se traduira par un dégagement de chaleur en P dans le premier cas, par une absorption de chaleur

dans le second, c'est-à-dire par un refroidissement. Tel es l'effet, connu sous le nom de *phénomène de Peltier*, qui se pro duit au contact de deux métaux.

Il peut se faire aussi que l'énergie localisée IH soit corré lative d'une réaction chimique, la réaction dépensant de l chaleur si H est positif, et produisant au contraire de la cha leur si H est négatif, de telle sorte que les variations de tem pérature soient alors dues uniquement à la chaleur dégagé en vertu de la loi de Joule.

248. — La réciproque des conclusions que nous venon d'établir est évidente. Si, en un point P quelconque du circuit, on constate la production d'un phénomène calorifique ou chimique dont l'énergie est proportionnelle à l'intensité du courant, on peut affirmer qu'il existe en ce point une variation brusque du potentiel, positive ou négative suivant le signe du travail, et que cette variation est indépendante de l'intensité. Si, de plus, le travail change de sens avec le courant, on en conclura que la variation de potentiel correspondante est fixe et indépendante du courant.

Considérons, en particulier, ce dernier cas; soit r la résistance de la région où se manifeste la chûte de potentiel, et supposons qu'il n'y ait au point considéré que des phénomènes calorifiques. La quantité de chaleur dégagée se compose de deux parties : l'une, définie par la loi de Joule, a pour expression $I^2 r$ et est indépendante du sens du courant; l'autre, due à l'effet Peltier, a pour valeur IH et change de signe avec le sens du courant. Si le courant passe dans un sens, la quantité totale de chaleur dégagée est

$$\mathrm{IH}\left(1+\mathrm{I}\frac{r}{\mathrm{H}}\right),$$

et, s'il passe en sens contraire,

$$-\mathrm{IH}\left(1-\mathrm{I}\frac{r}{\mathrm{H}}\right).$$

A mesure qu'on fera décroître l'intensité, le terme $\mathrm{I}\frac{r}{\mathrm{H}}$ de-

viendra de plus en plus petit, l'effet Peltier sera prédominant, et le renversement du courant tendra de plus en plus à produire des effets égaux et de signes contraires.

Une question se présente ici à propos du phénomène de Peltier. L'effet calorifique que l'on observe pendant le passage du courant, à la soudure des deux métaux, mesure la chûte brusque de potentiel qui existe en ce point, et semble devoir mesurer, par conséquent, la force électromotrice de contact qui existe entre eux d'après la théorie de Volta. Le résultat qu'on obtient ainsi concorde-t-il avec celui que donnent les autres procédés, l'emploi des électromètres, par exemple?

L'expérience répond d'une manière négative à cette question : non seulement les séries de nombres obtenus par les deux procédés ne sont pas concordantes, mais les corps ne s'y trouvent pas rangés dans le même ordre; les nombres des deux séries ne sont pas du même ordre de grandeur, ils sont même parfois de signes contraires. Il est donc certain que dans les deux cas on ne mesure pas le même phénomène. L'explication la plus plausible de ce désaccord est que, dans les mesures électrostatiques, on se trouve en présence d'un phénomène complexe dans lequel la nature du milieu, nécessairement interposé entre les métaux en contact, joue un rôle considérable.

249. Décompositions chimiques. — Toutes les fois qu'un composé liquide est traversé par un courant, il se dédouble : on voit l'un des éléments apparaître sur le conducteur qui amène le courant, l'autre sur celui qui l'emporte. Faraday a désigné ce phénomène sous le nom d'*électrolyse;* il appelle *électrolyte* le corps soumis à la décomposition et *électrodes* les deux conducteurs qui servent à l'entrée et à la sortie du courant, le premier étant l'électrode *positive* et le second l'électrode *négative* (1).

Deux conditions sont nécessaires pour la production de l'électrolyse : il faut que le courant puisse traverser le com-

(1) Faraday appelle *anode* le conducteur qui amène le courant, *cathode* celui par lequel il sort; il donne le nom d'*Ions* aux éléments de la décomposition. L'*anion* se dégage sur l'anode, le *cation* sur la cathode; mais ces dernières dénominations n'ont pas été, comme les premières, généralement adoptées.

posé et que celui-ci soit liquide ou tout au moins à l'état pâteux. Ainsi le verre au rouge donne des signes évidents de décomposition, parce qu'il devient à la fois conducteur et pâteux.

Il est extrêmement remarquable que les produits de la décomposition n'apparaissent que sur les électrodes. Clausius, développant une théorie proposée d'abord par Grotthus, interprète ce phénomène d'une manière ingénieuse. Pour lui, les molécules qui composent les corps sont dans un état d'agitation continuelle; mais, tandis que les excursions de chaque molécule sont limitées dans les solides, ces excursions, dans les liquides, peuvent se poursuivre sans limite et suivant des directions quelconques. Ainsi la molécule d'hydrogène qui fait partie d'une molécule d'eau n'est pas liée invariablement à la molécule correspondante d'oxygène; mais, entraînée dans un tourbillonnement incessant, elle peut quitter cette première molécule d'oxygène pour s'unir à une molécule voisine et se transporter ainsi, par voie d'échanges successifs, à des distances infiniment grandes par rapport au rayon d'activité. Dans l'état ordinaire, ces mouvements ont des directions absolument quelconques; le passage de l'électricité aurait pour effet de leur imprimer une tendance systématique, en vertu de laquelle les molécules d'hydrogène descendant le courant seraient poussées vers l'électrode négative; celles d'oxygène, au contraire, remontant le courant, marcheraient vers l'électrode positive.

250. Première loi de Faraday. — Les premières expériences de décomposition de l'eau par l'électricité paraissent dues à Troostwik et Dieman en 1795. Ils employaient l'étincelle des batteries partant entre deux fils d'or ou de platine. L'expérience fut répétée en 1800 au moyen du courant de la pile par Carlisle et Nicholson. Quand on veut opérer avec des étincelles, il y a grand avantage à employer les électrodes dites à la Wollaston, et qui consistent en un fil de platine soudé dans un tube de verre de manière à ne laisser en contact avec le liquide que la section même du fil. Wollaston, Faraday, Armstrong, ont démontré que l'effet de l'étincelle est identique à celui de la pile. Quelle que soit la provenance

de l'électricité, la *quantité d'eau décomposée est proportionnelle à la quantité d'électricité qui passe.*

Cette loi, énoncée par Faraday, a été surtout vérifiée par la mesure électromagnétique des courants; mais la détermination directe du débit d'électricité par les méthodes électrostatiques permet également d'en donner une démonstration très exacte. Dans des expériences récentes, M. Warren de la Rue a fait passer à travers l'eau les décharges d'un condensateur chargé à des potentiels dans le rapport de 1, 2, 3 et vérifié, d'une façon très rigoureuse, la proportionnalité de la quantité d'électricité à la quantité d'eau décomposée. Cette proportionnalité permet de considérer les électrolytes comme des mesureurs d'électricité; on appelle *voltamètre* un appareil disposé de manière à recueillir les gaz qui proviennent de la décomposition de l'eau.

251. — Le travail de la décomposition chimique étant proportionnel à l'intensité du courant, il résulte de la remarque faite plus haut, qu'il doit exister quelque part dans le voltamètre une chûte brusque de potentiel H, indépendante de l'intensité. L'énergie rendue disponible par la chûte du courant en ce point est employée à la décomposition de l'eau et peut être calculée en valeur absolue.

Soit M la quantité d'électricité qui a traversé le voltamètre pendant un certain temps, et P le poids d'eau décomposée. Ces deux quantités étant proportionnelles, le quotient $\frac{P}{M}=p$ exprime le poids d'eau décomposée par l'unité d'électricité. Enfin, en désignant par a la chaleur de combinaison de l'unité de poids d'eau à pression constante, JaP représente l'énergie nécessaire pour décomposer un poids d'eau égal à P. Cette énergie étant fournie par la chûte du courant, on doit avoir

$$W=MH=JaP;$$

on en déduit

$$H=\frac{JaP}{M}=Jap.$$

Ainsi, entre les deux électrodes d'un voltamètre traversé

par un courant il existe, outre la différence de potentiel due à la résistance du conducteur liquide intermédiaire, une chûte brusque, dont le siège est indéterminé, qui peut se produire soit tout entière sur une électrode, soit partiellement sur les deux, et qui a pour expression numérique le travail mécanique correspondant à l'énergie absorbée par la quantité d'eau que décompose une unité d'électricité.

252. Polarisation des électrodes. — Par quel mécanisme se produit cette différence de potentiel? Il est évident qu'avant le passage du courant les deux électrodes, si elles sont formées d'un même métal, toutes deux en platine par exemple, sont à un même potentiel, probablement différent de celui de l'eau, en vertu de la loi de Volta; mais les variations brusques et de sens contraires qui existent alors, à chacune des électrodes, donneraient dans le voltamètre un travail qui serait évidemment nul. Quand le courant est établi, les deux chûtes sont inégales et leur différence devient égale à H. On est donc conduit à admettre, en suivant les idées de Volta, qu'il s'est produit une modification des surfaces en contact. Le dépôt sur les électrodes des éléments de l'électrolyte donne une explication suffisante de cette modification.

Il suffit, en effet, qu'une lame ait été employée comme électrode ou même plongée dans un gaz pour qu'on trouve, quand on la met dans l'eau en présence d'une lame de même nature, mais neuve ou récemment portée au rouge, une différence de potentiel entre les deux lames.

Considérons, en particulier, la décomposition de l'eau. Les premières portions de gaz qui viennent au contact de la lame de platine paraissent, sinon former avec elle une véritable combinaison, tout au moins s'y déposer à un état de condensation dans lequel le gaz est loin d'avoir l'énergie potentielle qui correspond à l'état libre. Cet effet de condensation des gaz doit avoir lieu surtout au début, et il va ensuite en diminuant progressivement jusqu'à ce que l'épaisseur de la couche soit devenue assez grande pour que les nouvelles bulles n'éprouvent plus aucune action de la part de la lame et puissent se dégager librement.

Ce n'est qu'à partir de ce moment que le travail de la dé-

composition de l'eau atteint sa valeur normale. Jusque là il n'était que la différence entre cette valeur normale et le travail correspondant à la condensation dont il vient d'être question; l'expérience montre que cette différence peut avoir au début une valeur très petite.

La modification subie ainsi par la surface des lames serait la cause du phénomène appelé *polarisation des électrodes*, et qui se manifeste par le développement d'une force électromotrice inverse de celle qui produit le courant. On conçoit ainsi comment cette polarisation n'est pas instantanée, comment elle peut croître d'une manière continue depuis zéro jusqu'à une limite maximum, enfin, comment la quantité d'électricité nécessaire pour amener un état de polarisation donné dépend de l'état et des dimensions des lames. Cette quantité s'appelle souvent la *capacité de polarisation* relative à l'état considéré.

En prenant des électrodes de surfaces très inégales et faisant passer dans le voltamètre une quantité déterminée d'électricité à un potentiel donné, on peut à volonté provoquer la polarisation de l'une ou l'autre des électrodes; les expériences récentes de M. Blondlot montrent que le phénomène suit la même loi, quel que soit le sens du courant, et que, pour une électrode et un électrolyte donnés, la capacité ne dépend pas du sens de la polarisation.

258. Courants secondaires. — Une fois la polarisation établie, si on rompt le courant primitif et qu'on réunisse les deux électrodes par un conducteur, un courant se produit en sens contraire du courant primitif en vertu de la force électromotrice de polarisation H, mais ce courant diminue rapidement et finit par disparaître plus ou moins; on l'appelle *courant secondaire*.

Il est facile de rendre compte de ce phénomène : quand on a réuni les deux électrodes par un conducteur, la couche de gaz disparaît peu à peu en reformant de l'eau; la force électromotrice diminue et disparaît avec elle; enfin il est évident que la quantité totale d'électricité mise en mouvement pendant la durée du courant secondaire doit être égale à celle qu'il avait fallu dépenser pour la polarisation des électrodes.

Il est clair que ce courant resterait constant si on pouvait maintenir constante la force électromotrice H ; il suffirait d'entretenir à la surface de l'électrode la couche gazeuse nécessaire à la polarisation complète. C'est précisément ce qui a lieu dans le *couple à gaz* de Grove.

251. Actions chimiques successives d'un courant. — Seconde loi de Faraday. — Supposons que dans un même circuit on ait introduit plusieurs couples de Grove, placés à la suite les uns des autres dans le même ordre, et plusieurs voltamètres. Soit n le nombre des couples, n' celui des voltamètres, R la résistance totale du circuit et I l'intensité du courant qui le parcourt. Dans chaque unité de temps, le travail fourni par l'ensemble des couples est $nJapI$; celui qui est dépensé par les voltamètres est $n'JapI$. Enfin une quantité de travail RI^2 est convertie en chaleur dans le circuit, en vertu de la loi de Joule. S'il n'y a aucun autre travail extérieur positif ou négatif, la somme des travaux positifs doit être égale à la somme des travaux négatifs, ce qui donne

$$nJapI = n'JapI + I^2R,$$

ou

$$(n-n')Jap = IR = (n-n')H.$$

Le produit IR est une quantité essentiellement positive; le courant ne peut donc exister que si l'on a

$$n > n'.$$

Les nombres n et n' sont d'ailleurs entiers si la polarisation est maximum dans tous les couples; si dans l'un d'eux la polarisation était incomplète, la force électromotrice correspondante ne serait qu'une fraction de H, et n devrait alors être considéré comme un nombre fractionnaire. Dans tous les cas, la condition nécessaire et suffisante de l'existence du courant est que n soit plus grand que n'.

Lorsque le régime permanent est établi, la polarisation étant supposée complète dans les couples ainsi que dans les voltamètres, il y a dans chacun d'eux un même travail effec-

tué pendant le même temps, positif dans les uns, négatif dans les autres. En d'autres termes, *pour chaque unité d'électricité qui traverse le système, une même quantité d'eau se forme dans les couples et se décompose dans les voltamètres.*

255. — Cette seconde loi de Faraday se vérifie encore alors même que la polarisation ne serait pas complète en tous les points de la chaîne considérée. Supposons, pour fixer les idées, que dans l'un des couples l'épaisseur des couches de gaz soit tombée au-dessous de sa valeur limite, et qu'à un instant donné la force électromotrice n'ait plus qu'une valeur H' plus petite que H; le transport d'une unité d'électricité ne correspond plus dans ce couple au même travail que dans les autres, mais la relation $H' = Ja'p$ est toujours satisfaite, si l'on désigne par a' la chaleur de formation de l'unité de poids d'eau avec de l'oxygène et de l'hydrogène à l'état de combinaison partielle où ils se trouvent sur le platine, et le couple ainsi altéré donne naissance à la même quantité d'eau que tous les autres.

La loi est d'ailleurs générale : *pour tout électrolyte, le poids des éléments combinés ou décomposés est proportionnel à la quantité d'électricité qui passe*, que l'opération soit positive ou négative, qu'elle ait lieu avec polarisation des électrodes, comme la décomposition de l'eau ou du sulfate de cuivre avec des électrodes de platine, ou que la polarisation soit négligeable, comme dans l'électrolyse du sulfate de cuivre par deux électrodes de cuivre. Cet énoncé comprend, comme conséquence, que l'électrolyte n'agit *jamais* à la manière d'un simple conducteur et ne laisse passer aucune fraction du courant sans décomposition corrélative.

Dans l'électrolyse du sulfate de cuivre par deux lames de cuivre, si les deux lames sont réellement dans le même état, la force électromotrice de contact du métal avec le liquide est la même de part et d'autre, et, comme il se dissout juste autant de cuivre à l'électrode positive qu'il s'en dépose à l'électrode négative, il doit y avoir égalité entre la chaleur produite et la chaleur dépensée. Au contraire, toute différence dans l'état des deux lames sera accusée par un travail calorifique.

256. — Nous devons cependant exprimer ici une réserve importante sur ce principe de l'équivalence de l'énergie chimique et du travail électrique. On admet, en réalité, qu'il ne se produit, au point où a lieu l'opération chimique, aucun travail extérieur ni aucune variation de température indépendante des résistances. S'il n'en est pas ainsi, on doit tenir compte de tous les travaux secondaires, physiques ou chimiques auxquels peut donner lieu l'électrolyse.

Dans la décomposition de l'eau, par exemple, l'énergie du courant produit d'abord la séparation de l'oxygène et de l'hydrogène et ensuite le travail nécessaire pour que les gaz occupent un certain volume à la pression extérieure.

Lorsque le courant provient d'une pile de Grove, le même travail est fourni par chacun des couples. D'ailleurs le travail extérieur est toujours le même, tant que la loi de Mariotte est vraie, pour le même poids d'eau décomposée et, par suite, pour le même débit d'électricité. Dans ces limites, la condition d'équilibre des couples et des électrolytes est donc indépendante de la pression.

Pour des pressions très élevées, la loi de Mariotte est très éloignée de la vérité ; la chaleur de combinaison propre de l'hydrogène et de l'oxygène est d'ailleurs modifiée, et l'on sait que la décomposition par la pile exige alors l'emploi de forces électromotrices beaucoup plus grandes. La chaleur de formation de l'eau est d'ailleurs fonction de la température, et les conditions d'équilibre dans un circuit pourront être modifiées, si les couples et les électrolytes sont à des températures différentes.

D'autre part, il peut arriver que certains éléments de la décomposition éprouvent des réactions secondaires indépendantes de l'action du courant et donnent lieu à une absorption ou à un dégagement de chaleur. Le résultat final de l'électrolyse n'est plus alors en relation simple avec la force électromotrice, et celle-ci ne peut plus être calculée par la chaleur de combinaison des éléments pris dans l'état où ils apparaissent après l'opération électrique.

257. Équivalents électrochimiques. — Soient A, A′, A″, ⋯ divers électrolytes, p, p', p'', ⋯ les poids de chacun d'eux dé-

composés par une unité d'électricité. Ces nombres sont appelés les *équivalents électrochimiques* des différents corps et l'expérience montre qu'ils sont proportionnels à leurs équivalents chimiques ordinaires.

Si on désigne par $a, a', a'', \cdots$ les chaleurs de combinaison de l'unité de poids pour chacun des composés, les éléments de la combinaison étant pris dans l'état où ils se trouvent par le fait du courant, c'est-à-dire sans tenir compte des réactions secondaires, les produits $ap, a'p', a''p'', \cdots$ seront les chaleurs de combinaison des équivalents. Par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait pour l'eau, on voit que les forces électromotrices $H, H', H'', \cdots$, relatives à ces divers électrolytes, sont déterminées par les relations

$$\begin{aligned} H &= Jap, \\ H' &= Ja'p', \\ H'' &= Ja''p'', \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

qui donnent

$$\frac{H}{ap} = \frac{H'}{a'p'} = \frac{H''}{a''p''} \cdots\cdots = J.$$

Il en résulte que *la force électromotrice d'un électrolyte est égale à l'équivalent mécanique de la chaleur de combinaison de son équivalent électrochimique.*

258. Loi d'Ed. Becquerel. — L'application de cette loi de Faraday ne présente pas d'ambiguité quand il s'agit de composés chimiques analogues. Si l'on produit, par un même courant, l'électrolyse de l'eau et d'une série de sulfates neutres de protoxydes, par exemple, l'équivalent électrochimique de chaque métal est le poids qui se dépose pour le dégagement d'un gramme d'hydrogène ; mais il peut y avoir doute si les composés n'ont pas la même formule. Avec deux sulfates neutres, l'un de protoxyde, l'autre de sesquioxyde de fer, décomposés par le même courant, on peut se demander si le même poids de fer ou le même poids d'oxygène sera mis en liberté dans les deux électrolytes. M. Ed. Becquerel a montré que *c'est le métalloïde qui fait la loi :* par conséquent les

poids de fer seront, pour les deux électrolytes, dans le rapport de 3 à 2. Il en est de même pour les sels des autres acides, les chlorures, les sulfures, etc.

259. Des couples électriques. — Considérons maintenant un circuit composé de divers électrolytes, les uns donnant lieu à des actions positives, les autres à des actions négatives. En désignant par a pour ceux de la première espèce, et par b pour ceux de la seconde, les chaleurs de combinaison de l'unité de poids, par R la résistance totale du circuit et par I l'intensité du courant, on aura

$$\sum \mathrm{J}ap\mathrm{I} = \sum \mathrm{J}bp\mathrm{I} + \mathrm{I}^2\mathrm{R},$$

ou

$$\mathrm{IR} = \mathrm{J}\left[\sum ap - \sum bp\right].$$

Le produit IR qui correspond à la chaleur dégagée dans le circuit en raison des résistances étant essentiellement positif, le courant ne pourra exister que si l'on a

$$\sum ap > \sum bp.$$

Si cette condition n'est pas remplie et que tous les électrolytes soient à l'état naturel, le courant s'établit d'abord au moment de la fermeture du circuit. Une décomposition incomplète polarise les électrodes et le courant cesse dès que la somme des forces électromotrices de polarisation atteint la valeur $\sum ap$; le système reste alors en équilibre. Tel est le cas d'un circuit formé d'un couple Daniell (**262**) et d'un voltamètre; la substitution du zinc au cuivre dans le couple Daniell donne 24,2 calories, tandis que la décomposition de l'eau en exige 34,5.

260. Dépolarisation par diffusion. — Il peut arriver cependant que l'on constate alors l'existence d'un courant excessivement faible. Ce courant est dû à la cause suivante : la polarisation des électrodes du voltamètre se dissipe peu à peu par suite de la diffusion du gaz; on conçoit que cette diffusion

sera plus ou moins rapide suivant les conditions de l'expérience, mais surtout suivant la valeur de la polarisation elle-même et de son écart par rapport à la polarisation maximum. Le courant observé dans ces circonstances sera celui qui est nécessaire pour rétablir les pertes dues à la diffusion et maintenir l'état d'équilibre qui correspond au maximum de polarisation pour les conditions de l'expérience. Ainsi s'expliquent les diverses particularités auxquelles donnent lieu les phénomènes de polarisation. Quand on unit à un voltamètre une source de force électromotrice insuffisante pour donner un dégagement de gaz continu, l'expérience montre que la force électromotrice de polarisation croît avec l'intensité du courant permanent dont il vient d'être question, mais moins rapidement; que, pour une valeur donnée de ce courant, la force électromotrice diminue quand on augmente la surface des électrodes; enfin, que la force électromotrice reste constante si l'intensité du courant et la surface des électrodes croissent dans le même rapport.

261. Couple de Volta. — Quelques mots nous suffiront maintenant pour compléter la théorie de la pile. Le couple de Volta proprement dit se compose de deux lames, l'une de zinc, l'autre de cuivre, plongées dans de l'eau rendue conductrice par l'addition d'une petite quantité d'acide sulfurique ou d'un sel quelconque, la lame de cuivre étant soudée à une lame de zinc qui fait partie du couple suivant. Entre deux métaux extrêmes identiques, on a ainsi trois contacts, zinc-cuivre, cuivre-eau et eau-zinc. La force électromotrice peut donc s'exprimer par les symboles habituels,

$$\mathrm{E} = \mathrm{Z}n|\mathrm{C}u + \mathrm{C}u|\mathrm{A}q + \mathrm{A}q|\mathrm{Z}n.$$

Volta admettait que l'eau ne joue que le rôle d'un conducteur; on aurait alors

$$\mathrm{C}u|\mathrm{A}q + \mathrm{A}q\mathrm{Z}n = 0,$$

et, par suite,

$$\mathrm{E} = \mathrm{Z}n|\mathrm{C}u.$$

D'après cette manière de voir, la force électromotrice du

couple de Volta ne dépendrait que du contact zinc-cuivre, et ces deux métaux réunis par une couche d'eau se trouve au même potentiel. L'altération superficielle des métaux au contact des liquides ou des gaz rend très difficile la vérification rigoureuse de l'hypothèse de Volta.

Quoi qu'il en soit, cette altération est tellement rapide et amène dans la valeur de la force électromotrice des changements tels, qu'au point de vue pratique, la force électromotrice du couple de Volta doit être considérée comme dépendant, pour une notable part, du milieu qui forme le troisième élément.

Lorsque le couple est fermé par un conducteur de résistance R, il se produit un courant dont l'intensité est donnée d'abord par la relation

$$I=\frac{E}{R},$$

mais l'eau est aussitôt décomposée, l'oxygène remonte le courant et oxyde la lame de zinc, l'hydrogène le descend et vient polariser la lame de cuivre ; il en résulte une force électromotrice inverse. Quand le régime permanent est établi, la force électromotrice de polarisation est E′ et l'intensité I′ satisfait à la relation

$$(E-E')I'=I'^2R,$$

ou

$$I'=\frac{E-E'}{R}.$$

Si on laisse reposer la pile, la polarisation disparaît lentement par diffusion. Quand on ferme de nouveau le circuit au bout d'un certain temps, le courant reparaît d'abord avec l'intensité primitive I, si l'influence de la couche d'oxyde de zinc est négligeable, pour reprendre ensuite l'intensité I′ au bout d'un temps généralement très court, mais qui peut être assez long si les surfaces des électrodes sont très grandes et la résistance du circuit considérable. Tant que le couple reste ouvert, la différence de potentiel des extrémités est donc égale à E.

Dans un circuit fermé, la force électromotrice utilisable est seulement E—E'. Il se produit dans chaque couple de l'oxyde de zinc et de l'hydrogène aux dépens du zinc et de l'eau. Comme on peut supposer que l'oxygène a passé par l'état gazeux en allant de l'eau au zinc, on voit que l'énergie disponible du couple correspond à l'excès de la chaleur de formation de l'oxyde de zinc sur celle de l'eau pour le même poids d'oxygène. Si l'eau est acidulée, la différence correspond à la substitution du zinc à l'hydrogène dans l'acide sulfurique : cette différence est de 17,7 calories environ.

La couche d'hydrogène qui recouvre le cuivre a encore pour effet d'augmenter beaucoup la résistance du couple, ce qui est une nouvelle cause d'affaiblissement du courant.

262. Couples non polarisables. — Des moyens mécaniques, comme l'agitation du liquide ou le frottement de la lame de cuivre par un corps étranger, permettent, en éliminant la plus grande partie du gaz, de diminuer beaucoup la résistance et même la polarisation; mais on peut supprimer complètement la couche gazeuse par une action chimique et obtenir ainsi des *couples non polarisables*.

Un liquide qui dissoudrait simplement l'hydrogène sans effet calorifique augmenterait déjà la force électromotrice de tout le travail que doit effectuer le gaz pour occuper un volume déterminé à la pression extérieure; mais si l'hydrogène entre dans une nouvelle combinaison chimique, ou même si l'on tient compte de la chaleur de dissolution, la force électromotrice est égale à la somme algébrique des énergies produites aux deux électrodes, ou aux deux pôles du couple.

Tel est, par exemple, le couple employé par Joule où la lame de cuivre est recouverte par une couche d'oxyde que l'hydrogène réduit peu à peu. La force électromotrice est égale à la différence des chaleurs d'oxydation du cuivre et du zinc pour un même poids d'oxygène.

Dans d'autres cas, le liquide renferme en dissolution un sel du métal qui constitue l'électrode positive, par exemple une dissolution de sulfate de cadmium dans laquelle plongent une lame de zinc et une lame de cadmium. Le sulfate dissous subit l'électrolyse quand le circuit est fermé et il se dépose

sur la lame de cadmium une quantité de cadmium équivalente au point de zinc dissous. La force électromotrice correspond à la chaleur de substitution du zinc au cadmium dans le sulfate, soit environ 8,3 calories.

Les choses restent dans le même état tant que la proportion du sulfate de zinc dissous n'est pas assez grande pour que ce sel lui-même prenne part à l'électrolyse. A partir de ce moment la polarisation du couple apparaît de nouveau.

En fonction des forces électromotrices de contact, la force électromotrice de ce couple peut être exprimée par les symboles suivants :

$$E = Zn|Cd + Cd|Cd\,O.SO^3 + Cd\,O.SO^3|Zn.$$

268. Couples à deux liquides. — Dans le *couple de Daniell* à sulfates, imaginé pour la première fois par Becquerel, on emploie deux liquides : une dissolution concentrée de sulfate de cuivre autour de la lame de cuivre et une dissolution de sulfate de zinc autour de la lame de zinc. Les deux liquides sont séparés par une membrane, comme une peau, ou par un vase de terre poreuse, afin d'empêcher le mélange des dissolutions sans interrompre la conductibilité.

La force électromotrice est alors

$$D = Zn|Cu + Cu|CuO,SO^3 + CuO,SO^3|ZnO,SO^3 + ZnOSO^3|Zn.$$

Pendant que la lame de zinc se dissout, le cuivre provenant de l'électrolyse du sulfate de cuivre se dépose sur la lame de cuivre. La force électromotrice correspond à la différence des chaleurs de formation du sulfate de zinc et du sulfate de cuivre, c'est-à-dire à la chaleur de substitution du zinc au cuivre dans le sulfate, soit 24,2 calories.

Ce couple présente une constance remarquable et c'est un de ceux dans lequel la force électromotrice change le moins par suite des variations de la température.

Dans le *couple de Grove*, le cuivre est remplacé par du platine : l'hydrogène est absorbé par de l'acide azotique et forme des composés nitrés d'un degré d'oxydation plus faible.

le zinc est placé dans une solution d'acide sulfurique ou de sulfate de zinc. En substituant du charbon au platine, on obtient le *couple de Bunsen*.

L'énergie disponible dans les couples de Grove et de Bunsen correspond à une quantité de chaleur d'environ 47 calories, ils ont donc une force électromotrice presque double de celle des couples de Daniell; les liquides présentent d'ailleurs une résistance beaucoup plus faible. Aussi les emploie-t-on de préférence toutes les fois qu'on veut obtenir des courants très intenses; mais les liquides s'altèrent rapidement, la résistance augmente, la force électromotrice diminue et le courant ne tarde pas à s'affaiblir.

264. Phénomènes électrostatiques dans les piles. — Le nom de *pile* donné habituellement à la réunion de plusieurs couples en communication les uns avec les autres provient de la forme imaginée d'abord par Volta. La pile à colonne de Volta se compose d'une série de doubles lames de zinc et de cuivre superposées dans le même sens et séparées les unes des autres par des rondelles de drap humide.

Un couple est formé par l'ensemble des corps qui existent entre deux zincs, c'est-à-dire zinc, cuivre, eau, zinc. On peut imaginer que chacune des lames de zinc appartient par moitié à deux couples successifs.

Si la pile commence à la partie inférieure par un cuivre et se termine en haut par un zinc, on voit que la première lame de cuivre n'intervient pas. La différence de potentiel étant égale à e pour chaque couple, le potentiel ira en croissant de bas en haut et, s'il y a n couples, la force électromotrice E de la pile est

$$E = en.$$

265. *Pile non isolée.* — Si la pile est mise en communication avec le sol par sa partie inférieure à l'aide de conducteurs dont on puisse négliger l'influence, l'extrémité supérieure A a un potentiel $V_a = E = ne$ proportionnel au nombre des couples. On le vérifie facilement, soit au moyen d'un électromètre, soit par la mesure des charges communiquées à un condensateur.

266. *Pile isolée.* — Si la pile, supposée formée de couples identiques et équidistants, n'a pas été mise en communication avec le sol, tout au moins depuis un temps assez long pour qu'elle ait pu prendre son équilibre, sa charge totale doit être nulle et la distribution des potentiels symétrique par rapport au point milieu.

On aura donc, pour les extrémités A et B ou les deux pôles,

$$V_a + V_b = 0,$$
$$V_a - V_b = E,$$

et, par suite,

$$V_a = -V_b = \frac{E}{2}.$$

Supposons qu'on donne à la pile un excès de charge M'; cette charge se distribuera comme elle le ferait sur un conducteur ordinaire de même forme et donnera à l'intérieur un potentiel constant V' tel qu'on ait, en appelant P la capacité de la pile,

$$V' = \frac{M'}{P}.$$

Le potentiel V', s'ajoutant en chaque point au potentiel primitif, ne troublera pas la loi des contacts. On aura ainsi, à l'extrémité supérieure A,

$$V_a = \frac{E}{2} + V' = \frac{ne}{2} + V',$$

et, sur le m^e couple à partir du bas,

$$V_m = \left(m - \frac{n}{2}\right)e + V'.$$

Supposons maintenant qu'on mette en communication avec une capacité C le m^e couple d'une pile isolée dont la charge totale est nulle. Cette capacité prend une charge M; il en résultera pour la pile une chute V de potentiel en chaque point,

de sorte qu'en désignant par V_m le potentiel nouveau du couple considéré, on aura

$$M = CV_m = PV.$$

On en déduit

$$V_a = \frac{E}{2} - V = \frac{E}{2} - \frac{C}{P} V_m = \frac{ne}{2} - \frac{C}{P} V_m.$$

On a d'ailleurs

$$V_a - V_m = (n - m) e.$$

En éliminant entre ces deux équations le potentiel intermédiaire V_m, il vient

$$V_a = e \frac{\frac{P}{C} \cdot \frac{n}{2} + n - m}{1 + \frac{P}{C}}.$$

Si le m^e couple est au sol, il est clair qu'on a

$$V_a = e(n - m).$$

On déterminerait de la même manière la distribution des potentiels sur une pile quelconque, symétrique ou non. Dans ce dernier cas, le point neutre de la pile isolée et non chargée n'est plus au milieu.

267. Représentation des potentiels à l'intérieur de la pile. — Figurons la pile par une droite telle que chaque portion de longueur soit proportionnelle à la résistance de la partie qu'elle représente, et élevons en chaque point une ordonnée proportionnelle au potentiel de ce point. Supposons qu'il s'agisse de couples de Volta, le potentiel croît d'une quantité constante à chaque contact zinc-cuivre; la courbe présentera donc aux points correspondants une variation brusque et toujours la même de l'ordonnée. Si la pile est ouverte, le potentiel reste constant dans la pile d'un contact au suivant, la courbe figurative des potentiels sera formée d'une série d'échelons équidistants, comme les marches d'un escalier. La ligne de potentiel zéro passe par le milieu si la pile est restée

isolée, ou par un point quelconque si elle est reliée à une capacité ou au sol.

Pour la pile fermée, trois cas peuvent se présenter :

1° Le conducteur interpolaire a une résistance négligeable vis-à-vis de celle de la pile. Les deux pôles sont sensiblement au même potentiel, et chaque contact produit la même variation de potentiel ; mais, d'un contact au suivant, il y a une chute progressive précisément égale. En appelant n le nombre des couples et r la résistance de chacun d'eux, la loi de Ohm donne

$$I = \frac{ne}{nr} = \frac{e}{r};$$

l'intensité est la même qu'avec un seul couple.

2° La résistance de la pile est négligeable vis-à-vis de celle du conducteur interpolaire. La variation des potentiels dans l'intérieur de la pile est à très peu près la même que si elle était ouverte. A l'extérieur, la chute de potentiel est continue, et si R est la résistance du conducteur interpolaire, l'intensité du courant est

$$I = \frac{E}{R} = n\frac{e}{R};$$

elle est donc proportionnelle au nombre des couples.

3° Enfin, si la résistance du conducteur interpolaire est de même ordre que celle de la pile, le potentiel s'élève toujours d'une quantité constante à chaque contact et baisse d'une manière continue, mais d'une quantité moindre, d'un contact au suivant; la différence des potentiels des deux pôles a une valeur finie, moindre que dans le cas de la pile isolée, mais d'autant plus grande que la résistance interpolaire est plus grande, et l'intensité du courant a pour expression, d'après la loi d'Ohm,

$$I = \frac{E}{R + nr}.$$

268. Pile plongée dans un milieu conducteur — Nous avons admis jusqu'à présent qu'aucune perte d'électricité n'a lieu

par la surface latérale de la pile. Il peut arriver que cette perte ne soit pas négligeable. Supposons qu'une pile à colonne de Volta, composée de lames infiniment minces, soit plongée dans un milieu conducteur, et que l'électricité s'écoule en même temps par les parois latérales et par les extrémités ; ce serait le cas d'une pile plongée dans l'eau si l'on néglige les effets de polarisation. Soit ε la force électromotrice de la pile par unité de longueur, ρ la résistance intérieure et ρ' la résistance extérieure par unité de longueur (**220**).

Le flux d'électricité est encore parallèle aux génératrices dans la plus grande étendue de chaque section normale de la pile, et une partie s'échappe latéralement en chaque point, de sorte que les surfaces de niveau sont planes et se raccordent avec la surface latérale, comme dans la figure 55.

Entre deux points infiniment voisins P et P', dont les potentiels sont V et V', l'intensité I du courant intérieur satisfait à l'équation

$$V' = V + \varepsilon dx - I\rho dx.$$

L'intensité en chaque point est donc donnée par l'équation

$$(1) \qquad I = \frac{1}{\rho}\left(\varepsilon - \frac{dV}{dx}\right).$$

Supposons le régime permanent établi et considérons deux tranches successives. Le flux d'électricité I qui traverse la première est égal à la somme du flux I' qui traverse la seconde et du flux i qui s'échappe par la surface latérale, ce qui donne

$$I = I' + i,$$

ou

$$i = I - I' = -dI.$$

Comme on a

$$i = \frac{1}{\frac{\rho'}{dx}} V = \frac{V dx}{\rho'},$$

il en résulte, d'après l'équation (1),

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{1}{\rho'}V.$$

Posons encore $\beta^2=\frac{\rho}{\rho'}$, cette équation devient

$$\frac{d^2V}{dx^2}-\beta^2V=0,$$

comme pour le régime permanent d'un fil avec perte par la surface (**220**). Pour déterminer les constantes de l'intégrale

$$V=Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x},$$

supposons que l'on compte les longueurs à partir du milieu de la pile et que, tout étant symétrique, le potentiel soit nul quand $x=0$; il en résulte

$$V=A(e^{\beta x}-e^{-\beta x}).$$

En appelant $\pm V_1$ le potentiel aux extrémités de la pile et l sa longueur, il vient

$$(2)\qquad V=V_1\frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{e^{\frac{\beta l}{2}}-e^{-\frac{\beta l}{2}}}.$$

269. — L'intensité du courant dans la pile et celle du courant latéral i ont pour expressions

$$(3)\qquad \begin{cases} I=\dfrac{1}{\rho}\left(\varepsilon-\dfrac{dV}{dx}\right)=\dfrac{1}{\rho}\left[\varepsilon-\dfrac{V_1\beta}{e^{\frac{\beta l}{2}}-e^{-\frac{\beta l}{2}}}(e^{\beta x}+e^{-\beta x})\right], \\ i=\dfrac{V}{\rho'}dx=\dfrac{1}{\rho'}\dfrac{V_1}{e^{\frac{\beta l}{2}}-e^{-\frac{\beta l}{2}}}(e^{\beta x}-e^{-\beta x})\,dx. \end{cases}$$

Pour déterminer le potentiel $\pm V_1$ des extrémités, il faut

évaluer l'intensité I_1 du courant qui s'écoule par chacune d'elles.

On a alors, en appelant encore R_1 la résistance du milieu à partir de ces extrémités,

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} = \frac{1}{\rho}\left[\varepsilon - \frac{V_1\beta}{e^{\frac{\beta l}{2}} - e^{-\frac{\beta l}{2}}}\left(e^{\frac{\beta l}{2}} + e^{-\frac{\beta l}{2}}\right)\right],$$

ce qui donne

$$(4)\qquad \frac{V_1}{e^{\frac{\beta l}{2}} - e^{-\frac{\beta l}{2}}} = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\rho}{R_1}+\beta\right)e^{\frac{\beta l}{2}} - \left(\frac{\rho}{R_1}-\beta\right)e^{-\frac{\beta l}{2}}},$$

$$(5)\qquad I = \frac{\varepsilon}{\rho}\left\{1 - \frac{\beta}{\left(\frac{R_1}{\rho}+\beta\right)e^{\frac{\beta l}{2}} - \left(\frac{R_1}{\rho}-\beta\right)e^{-\frac{\beta l}{2}}}(e^{\beta x}+e^{-\beta x})\right\}.$$

Si le milieu extérieur est isolant, $\rho' = \infty$ et $\beta = 0$. Alors le second terme de l'intensité I se présente sous une forme indéterminée, mais on trouve finalement l'expression ordinaire

$$I = \frac{l\varepsilon}{\rho l + 2R_1} = \frac{E}{\rho l + 2R_1}.$$

La résistance totale de la pile et du milieu, à partir du point P, est encore donnée (**222**) par l'expression

$$\frac{R - \sqrt{\rho\rho'}}{R + \sqrt{\rho\rho'}} = \frac{1}{C_1}e^{-2\beta x}.$$

On déterminera la constante C_1 par la condition que cette résistance devienne égale à R_1 pour $x = \frac{l}{2}$, ce qui donne

$$C_1 = \frac{R_1 + \sqrt{\rho\rho'}}{R_1 - \sqrt{\rho\rho'}}e^{-\beta l}.$$

270. Phénomènes électrocapillaires. — Les expériences précédentes ont montré que toute modification de la surface de contact de deux corps amène une variation de la force électromotrice. Cette loi peut être considérée comme générale, et l'on doit admettre *à priori* qu'il existe une relation entre les forces électromotrices de contact de deux corps et toute autre propriété dépendant de l'état des surfaces.

Si l'on emploie, par exemple, une surface de mercure comme électrode négative pour décomposer l'eau, le mercure se polarise, c'est-à-dire que la différence de potentiel de contact des deux liquides augmente de plus en plus avec la force électromotrice extérieure, jusqu'à ce que commence le dégagement des bulles de gaz. Les propriétés capillaires du mercure, c'est-à-dire sa tension superficielle, dépendent uniquement de l'état de la surface et doivent, par conséquent, changer avec la polarisation.

Les expériences de M. Lippmann ont montré qu'il en est ainsi. La tension capillaire du mercure en contact avec l'eau acidulée croît d'abord avec la force électromotrice de polarisation, jusqu'à ce que celle-ci atteigne 0,9 de la force électromotrice d'un couple Daniell, et diminue ensuite à mesure que la polarisation augmente.

Le raisonnement et l'expérience indiquent aussi que la réciproque est vraie. Si, par un procédé mécanique quelconque, on déforme la surface du mercure et que, par suite, on fasse varier la tension superficielle au contact des deux liquides, la différence de potentiel change en même temps; pendant la déformation, le potentiel varie de telle manière que la tension superficielle qui lui correspond tend à s'opposer au mouvement produit.

CHAPITRE QUATRIÈME

COURANTS THERMOÉLECTRIQUES

271. Découverte de Seebeck. — Nous avons vu qu'un circuit fermé, composé de plusieurs métaux à la même température, ne peut donner lieu à aucun courant; mais la loi n'est plus vraie si les différents points du circuit, et particulièrement les soudures de métaux, ne sont plus à la même température. Le circuit est alors traversé par un courant dit *courant thermoélectrique.*

Cette découverte importante est due à Seebeck (1821).

Dans un circuit formé par un barreau de bismuth dont les extrémités sont réunies par une lame de cuivre, le courant va du bismuth au cuivre à travers la soudure la plus chaude; on dit que le cuivre est négatif par rapport au bismuth. Avec un couple antimoine-cuivre, le courant est inverse, il va du cuivre à l'antimoine par la soudure chaude; l'antimoine est donc négatif par rapport au cuivre.

Il est naturel de penser que les métaux se classent suivant une série régulière, au point de vue de cette nouvelle propriété, et que l'antimoine, négatif par rapport au cuivre, est à plus forte raison négatif par rapport au bismuth. C'est ce que l'expérience vérifie, en effet, et la force électromotrice pour les mêmes températures aux soudures est plus grande avec le couple bismuth-antimoine qu'avec les deux couples bismuth-cuivre ou cuivre-antimoine.

La force électromotrice d'un couple thermoélectrique peut être obtenue en brisant le circuit en un point pris en dehors

des soudures et déterminant la différence du potentiel des deux bouts ainsi isolés.

Dans un circuit formé d'un seul métal homogène, il est impossible de provoquer un courant électrique par des variations de température, quelles que soient d'ailleurs la forme et la section du conducteur au voisinage des points chauffés. Il pourra, au contraire, se produire des courants si le métal présente une dissymétrie permanente ou passagère, dans ses propriétés physiques, de part et d'autre des points chauffés.

272. Lois des courants thermoélectriques. — Sans discuter les expériences qui mettent ces particularités en évidence et qui ont servi à établir les lois du phénomène, nous nous bornerons à résumer les lois elles-mêmes.

I. Loi de Volta. — *Dans un circuit métallique quelconque, dont tous les points sont à la même température, il n'y jamais de courant.*

En effet, la somme algébrique de toutes les forces électromotrices de contact est alors nécessairement nulle puisque les métaux obéissent à la loi des contacts successifs (**189**).

II. Loi de Magnus. — *Dans un circuit homogène, il n'y a jamais de courant permanent, quelles que soient la forme du conducteur et les variations de température qui existent entre les différents points du circuit.*

Cette loi entraîne comme conséquence, ou bien que la variation de température d'un point à un autre ne détermine aucune différence de potentiel entre ces deux points, ou bien que cette différence, si elle existe, ne dépend que des températures elles-mêmes et nullement de la loi de variation.

Depuis le point le plus chaud du circuit jusqu'au point le plus froid, on trouve en effet, par deux chemins différents, les mêmes chutes de température distribuées suivant des lois quelconques entièrement indépendantes. S'il existe des différences de potentiel et que la somme totale de ces différences soit nulle, il faut qu'entre les deux températures t et t', de part et d'autre, la variation de potentiel soit la même, quelle que soit la distance des points P et P' entre lesquels a lieu cette chute de température.

Il résulte de la loi de Magnus que *la force électromotrice*

ne dépend que de la température des deux soudures et nullement de la distribution de la température dans les conducteurs qui les séparent; car la différence des potentiels aux deux extrémités d'un conducteur homogène ne dépend que des températures de ces extrémités.

Nous représenterons par $E_t^{t'}(AB)$ la force électromotrice de deux métaux A et B lorsque les soudures sont aux températures t et t', le courant allant de A en B à travers la soudure la plus chaude à la température t'. Cette force électromotrice est une fonction des deux températures t et t'.

III. Loi des températures successives (Becquerel). — *Pour un couple donné, la force électromotrice relative à deux températures quelconques t et t' est égale à la somme des forces électromotrices qui correspondent aux températures t et θ, d'une part, puis θ et t', d'autre part, θ étant une température intermédiaire entre les deux premières.*

Cette loi peut se traduire de la manière suivante :

$$E_t^{t'} = E_t^{\theta} + E_{\theta}^{t'}.$$

Nous savions déjà que la force électromotrice ne dépend que des températures des deux soudures ; cette dernière loi montre que la force électromotrice peut être exprimée par la différence de deux termes, dont l'un ne contient que la température t, l'autre la température t', ces deux termes étant les valeurs d'une même fonction de la température.

On peut donc écrire

$$E_t^{t'} = F(t') - F(t).$$

IV. Loi des métaux intermédiaires (Becquerel). — *Si deux métaux* A *et* B *sont séparés dans un circuit par un ou plusieurs métaux intermédiaires maintenus tous à une même température t, la force électromotrice est la même que si les deux métaux étaient unis directement et la soudure portée à la même température t.*

La loi des métaux intermédiaires peut s'exprimer par l'é-

quation

$$E_t^{t'}(AB) = E_t^{t'}(AC) + E_t^{t'}(CB).$$

En effet, si deux métaux A et B sont réunis à la soudure chaude par un métal intermédiaire C, on peut, d'après la loi de Magnus, imaginer qu'un point P de ce troisième métal est à la température inférieure t et interposer, de même, à la soudure froide un morceau du métal C maintenu à la température de cette soudure. On a alors dans le circuit, entre les mêmes limites de température, les deux couples AC et CB; la force électromotrice résultante est celle qui se produirait directement entre les métaux A et B.

Cette loi a une grande importance pratique : elle montre que la soudure qui sert à joindre deux métaux n'a aucune influence sur les phénomènes auxquels ils donnent lieu.

V. Phénomènes d'inversion. — Pour certains couples thermoélectriques, l'intensité de courant augmente d'une manière continue à mesure qu'on élève la température de la soudure chaude, celle de la soudure froide restant invariable. Le couple est dit à *marche uniforme*, lorsque la force électromotrice est proportionnelle à la différence des températures des deux soudures.

Dans la plupart des cas, au contraire, la force électromotrice du couple, après avoir passé par un maximum, devient nulle, puis change de signe.

Il y a donc, à partir d'une certaine température, *inversion* du courant, et l'intensité augmente ensuite d'une manière continue sans manifester de nouvelle inflexion. Ce phénomène a été découvert par Cumming en 1823.

Gaugain a constaté que la température d'inversion dépend de celle de la soudure froide, et que *la moyenne des températures des deux soudures au moment de l'inversion est toujours égale à la température du maximum d'intensité.*

278. Représentation des phénomènes. — Gaugain, dans un travail remarquable sur les phénomènes thermoélectriques, en représente la marche par un procédé graphique qui permet de vérifier facilement les lois qui précèdent. Prenant pour abscisse la différence $t - t_0$ des températures des deux soudures

(la soudure froide ayant une température constante de 20°), il élève en chaque point une ordonnée proportionnelle à la force électromotrice correspondante.

On observe sur ces courbes (fig. 63) les propriétés suivantes :

1° Elles sont symétriques par rapport à l'ordonnée maximum, ce qui vérifie la loi relative à la température d'inversion, car on a, en appelant t_m la température du maximum et t_i celle d'inversion,

$$t_m = \frac{t_0 + t_i}{2}.$$

Ces courbes ont été calculées par Gaugain comme des

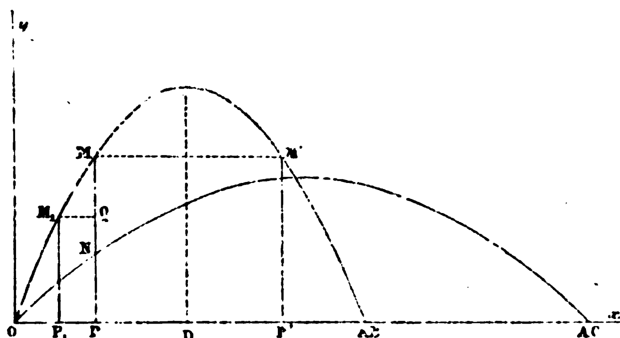


Fig. 63

branches d'hyperboles à axe vertical, mais on peut les remplacer par des paraboles; la différence des ordonnées calculées par les deux courbes pour un même couple sont de l'ordre des erreurs expérimentales; les unes et les autres représentent également bien les expériences. La théorie indique, comme nous le verrons plus loin, que la courbe représentative des forces électromotrices en fonction de température doit être, en effet, une parabole.

2° Si l'on mène une horizontale par un point M_1, qui correspond à la température t_1, les ordonnées, comptées à partir de cette droite, représentent les forces électromotrices relatives à la température t_1 pour la soudure froide. La loi des tem-

pératures successives se trouve ainsi vérifiée, puisqu'on a

$$MP = MQ + QP = MQ + M_1P_1,$$

c'est-à-dire

$$E_{t_0}^{t} = E_{t_1}^{t} + E_{t_0}^{t_1}.$$

La température d'inversion correspond au point où la nouvelle ligne des abscisses rencontre la courbe. Si OP représente la température de la soudure froide, OP′ sera celle de l'inversion; on voit qu'elle dépend de la température de la soudure froide.

3° Si deux courbes AB et AC représentent les forces électromotrices pour les couples formés par un métal A associé respectivement à deux métaux B et C, la différence MN des ordonnées des deux courbes représente la force électromotrice du couple formé par les deux métaux B et C. La relation $MP = PN + NM$ équivaut donc à l'équation

$$E(AB) = E(AC) + E(CB),$$

qui exprime la loi des métaux intermédiaires.

274. Conséquences du principe de Volta. — En laissant à part le phénomène de l'inversion, on peut considérer les lois qui précèdent comme des conséquences du principe de Volta, savoir qu'*il existe au contact de deux métaux une force électromotrice, et que cette force électromotrice est une fonction de la température*.

Dans cet ordre d'idées, la force électromotrice d'un couple est la somme algébrique des deux forces électromotrices de sens contraires qui existent aux deux soudures.

Convenons de représenter par le symbole $\frac{A|B}{t}$ la force électromotrice H de contact de deux métaux A et B à la température t, nous aurons

$$E_1^2(AB) = \frac{B|A}{t_2} - \frac{B|A}{t_1} = H_2 - H_1.$$

Soit I l'intensité du courant qui traverse le circuit dont la résistance totale est R. Pendant l'unité de temps, le travail emprunté à la soudure chaude est IH_2, et le travail dépensé à la soudure froide est IH_1 ; la différence de ces travaux est transformée en énergie calorifique qui se dégage le long du circuit conformément à la loi de Joule, et l'on a

$$IH_2 = IH_1 + I^2R,$$

ou

$$I = \frac{H_2 - H_1}{R}.$$

Le système peut donc être considéré comme une machine thermique dont la source chaude fournit une quantité de chaleur Q_2 donnée par l'équation $JQ_2 = IH_2$, et dont la source froide absorbe une quantité moindre Q_1, déterminée de même par l'équation $JQ_1 = IH_1$, la différence de ces deux quantités étant employée à échauffer le circuit, d'où il résulte

$$J(Q_2 - Q_1) = I^2R.$$

La loi de Magnus est comprise dans l'hypothèse même qu'il n'existe de force électromotrice qu'aux soudures.

La loi des températures successives résulte de l'identité

$$E_1^{t_2}(AB) = \frac{B|A}{t_2} - \frac{B|A}{0} + \frac{B|A}{0} - \frac{B|A}{t_1} = E_0^{t_2} + E_{t_1}^{0}.$$

Enfin la loi des métaux intermédiaires est également évidente, car on a, par définition,

$$E_1^2(AC) = E_1^2(C.B) = \frac{C|A}{t_2} - \frac{C|A}{t_1} + \frac{B|C}{t_2} - \frac{B|C}{t_1}.$$

D'autre part, la loi des tensions de Volta donne, pour une température quelconque,

$$\frac{B|C}{t} + \frac{C|A}{t} = \frac{B|A}{t};$$

l'équation précédente devient alors

$$E_1^2(AC)+E_1^2(CB)=\frac{B|A}{t_2}-\frac{B|A}{t_1}=E_1^2(A.B).$$

275. Conséquences de l'inversion. — Toutefois le principe de Volta, restreint au contact des corps de natures différentes, ne suffit pas pour expliquer les phénomènes d'inversion.

Considérons, en effet, un circuit composé de deux métaux A et B. Pour rendre compte de l'inversion avec les seuls effets de contact, il faudrait admettre que la différence de potentiel H_2 à la soudure chaude augmente d'abord avec la température, passe par un maximum, diminue ensuite et devient égale, pour la température d'inversion, à la différence de potentiel H_1 de la soudure froide. Puis la valeur de H_2 continuerait de décroître ; alors, le courant étant changé de signe, le jeu des forces électriques produirait un dégagement de chaleur sur la soudure chaude, une absorption à la soudure froide, outre l'échauffement du circuit en vertu de la loi de Joule. On peut imaginer que les causes de refroidissement du circuit par rayonnement soient tellement diminuées qu'il soit possible de supprimer la source de chaleur, et que le seul passage du courant suffise, non seulement à entretenir la température de la soudure chaude, mais à l'élever encore, et à diminuer celle de la soudure froide, ce qui aurait pour résultat d'exagérer le courant. On aurait ainsi réalisé un circuit métallique qui jouirait de la singulière propriété de transporter de la chaleur des points les plus froids sur les points plus chauds sans aucune dépense d'énergie. Sans être aussi évidemment impossible que le problème du mouvement perpétuel, un pareil résultat est incompatible avec l'allure générale des phénomènes calorifiques ; il est d'ailleurs en contradiction directe avec le principe de Carnot.

Si les courants thermoélectriques n'étaient dus qu'aux forces électromotrices de contact des soudures, le principe de Carnot exigerait que tous les couples eussent une marche uniforme.

Supposons, en effet, qu'une pile thermoélectrique fonction-

nant entre les températures t_1 et t_2 soit mise en communication avec un électrolyte dont la force électromotrice de décomposition est E; on aura la relation

$$IH_2 - IH_1 = I^2R + IE,$$

ou

$$J(Q_2 - Q_1) = I^2R + IE.$$

Si l'intensité du courant I est très petite, et la résistance R médiocre, le terme I^2R est négligeable, la force électromotrice d'opposition E est très peu inférieure à $H_2 - H_1$ et l'excès de chaleur fournie par la source chaude est employée à produire le travail extérieur IE. Supposons que, par un moyen quelconque, on fasse croître E jusqu'à une valeur E', très peu supérieure à $H_2 - H_1$, le courant changera de sens; si la valeur absolue de l'intensité est restée la même, les mêmes quantités de chaleur seront encore mises en jeu à chaque soudure, mais en sens inverse, et l'électrolyte fournira cette fois du travail au lieu d'en absorber. Dans le cas d'un courant très faible, la pile thermoélectrique se comporte donc comme une machine thermique reversible, et on peut lui appliquer le principe de Carnot. Si T_1 et T_2 sont les températures absolues des deux soudures, les quantités de chaleur Q_1 et Q_2, absorbées ou fournies par les deux sources suivant le jeu de la machine, doivent être proportionnelles aux températures absolues T_1 et T_2, et l'on doit avoir

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1},$$

ou, A étant une constante,

$$\frac{H_2}{T_2} = \frac{H_1}{T_1} = A.$$

Il en résulterait

$$\frac{H_2 - H_1}{T_2 - T_1} = \frac{E_1^2}{T_2 - T_1} = A,$$

et, par suite,

$$E_1^2 = A(T_2 - T_1).$$

Pour tous les couples, la force électromotrice devrait donc être proportionnelle à la différence des températures des deux soudures; tous les couples auraient une marche uniforme et, en particulier, le phénomène de l'inversion du courant ne devrait jamais se présenter.

276. Théorie de sir W. Thomson. — Le principe de Volta ne peut donc suffire à l'explication complète des phénomènes thermoélectriques; il faut admettre l'existence de forces électromotrices autres que les forces électromotrices de contact et

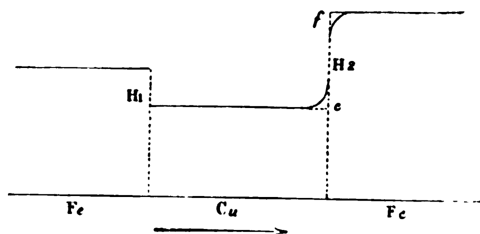


Fig. 64

capables de donner, comme celles-ci, des phénomènes calorifiques réversibles.

Les moindres changements dans l'état physique des métaux, tels que la trempe, la torsion ou la traction, etc., modifient leurs propriétés électriques; il est donc naturel de généraliser le principe de Volta et d'admettre que le contact de deux parties du même métal à des températures différentes donne aussi lieu à une différence de potentiel.

La force électromotrice qui résulte des variations de la température est nulle dans un fil homogène (loi de Magnus), parce que la chute totale de potentiel de part et d'autre du maximum a la même valeur; mais cette compensation cesse d'avoir lieu de part et d'autre de la soudure de deux métaux différents, et on doit tenir compte de la variation continue du potentiel que les variations de température déterminent le long des conducteurs.

Pour fixer les idées, considérons un couple cuivre-fer, par exemple, fonctionnant entre les températures t_1 et t_2, et soient H_1 et H_2 (fig. 64) les forces électromotrices de contact à ces deux températures; supposons en outre que, le long du cuivre C_u, par suite de l'élévation de température depuis t_1 jusqu'à t_2, le potentiel ait crû d'une quantité c indépendante de l'intensité du courant; qu'inversement sur le fer F_e il y ait, pour le même excès de température, une diminution de potentiel f; le potentiel, dans le voisinage de la soudure chaude, se sera élevé de la quantité $f+c=h$, et la force électromotrice du couple sera maintenant

$$E=H_2+h-H_1.$$

Nous avons admis implicitement que la température t_2 est

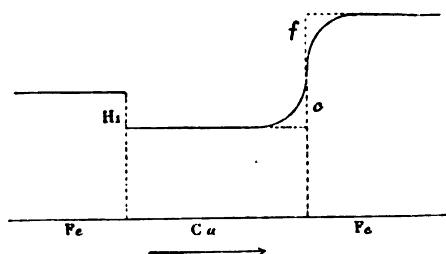


Fig. 65

inférieure à la température d'inversion. Le courant va du cuivre au fer par la soudure chaude; l'énergie calorifique absorbée tant à la soudure chaude que sur les points voisins est égale à $(H_2+h)I$, et celle qui est dépensée à la soudure froide $H_1 I$.

La température inférieure t_1 restant fixe, la force électromotrice du couple augmentera tant que la somme H_2+h sera croissante, c'est-à-dire tant que l'on aura

$$\frac{dH_2}{dt}+\frac{dh}{dt}>0,$$

et le maximum aura lieu pour la température t_m, évidem-

ment indépendante de t_1, déterminée par la condition

$$\frac{dH_2}{dt}+\frac{dh}{dt}=0.$$

Nous verrons qu'à ce moment la valeur de H_2 est nulle et qu'elle devient ensuite négative. La différence de potentiel au voisinage de la soudure est due alors seulement aux variations de température sur les deux métaux (fig. 65).

La température continuant à croître, H_2 change de signe, le fer qui était positif par rapport au cuivre devient négatif; la distribution du potentiel est représentée par la figure 66 et il se dégage de la chaleur sur les deux soudures.

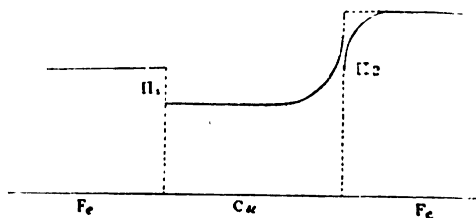


Fig. 66

L'inversion se produit au moment où l'on a

$$H_2+h=H_1.$$

Pour une température plus élevée sur la soudure chaude, la force électromotrice change de signe, et on a

$$H_2+h<H_1.$$

Dans ce cas, qui est représenté par la figure 67, le courant absorbe de l'énergie calorifique aux deux soudures, IH_2 à la soudure chaude, IH_1 à la soudure froide, et il s'en dégage une quantité Ih sur les points où la température est variable.

Telle est l'idée générale de la théorie de sir W. Thomson dont nous allons développer les conséquences mathématiques.

Nous appellerons *effet Thomson*, les différences de potentiel dues aux variations de température qui forment la base de cette théorie.

277. Pouvoirs thermoélectriques. — Nous avons vu, par la loi des températures successives, que la force électromotrice d'un couple est la différence des valeurs d'une même fonction pour les températures des deux soudures. Si ces tempéra-

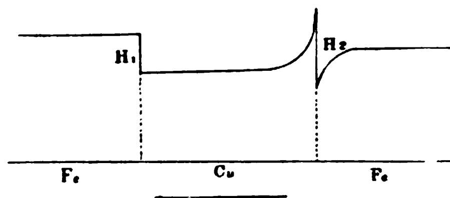


Fig. 67

tures t et $t+dt$ sont infiniment voisines, la force électromotrice est aussi infiniment petite et a pour expression

$$dE = F(t+dt) - F(t) = \frac{dF}{dt}dt;$$

on peut donc écrire

$$(1) \qquad \frac{dE}{dt} = \varphi(t).$$

Sir W. Thomson appelle la fonction $\varphi(t)$ *le pouvoir thermoélectrique des deux métaux considérés à la température t*. Cette fonction n'est autre chose que le coefficient angulaire de la tangente aux courbes de Gaugain. On en déduira la force électromotrice du couple, pour les températures t_1 et t_2 des deux soudures, par la formule

$$E_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\,dt.$$

278. — Cette fonction jouit d'une propriété remarquable qui permet d'exprimer d'une manière très simple les phénomènes thermoélectriques.

Le pouvoir thermoélectrique de deux métaux A *et* B *à une température t est égal à la différence des pouvoirs thermoélectriques des mêmes métaux* A *et* B *par rapport à un troisième métal quelconque* C.

En effet, la loi des contacts successifs à une même température, donne l'équation

$$E(AC) = E(AB) + E(BC).$$

On en déduit

$$\frac{dE(AC)}{dt} = \frac{dE(AB)}{dt} + \frac{dE(BC)}{dt},$$

ou

$$\varphi(AC) = \varphi(AB) + \varphi(BC),$$

et, par suite,

(2) $$\varphi(AB) = \varphi(AC) - \varphi(BC).$$

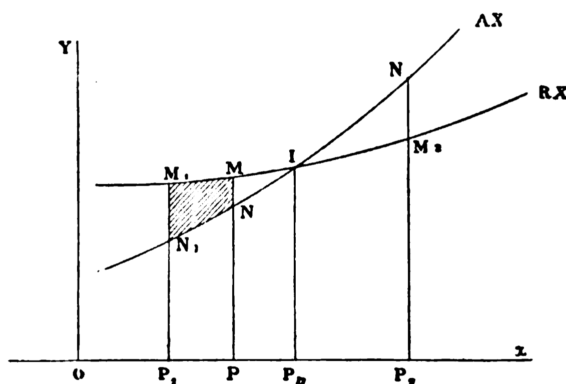


Fig. 68

Si donc on connaît le pouvoir thermoélectrique des différents métaux par rapport à un métal de comparaison X, il sera facile d'en déduire le pouvoir thermoélectrique de deux métaux quelconques par la formule

$$\varphi(AB) = \varphi(AX) - \varphi(BX).$$

Soit AX (fig. 68) la courbe qui représente la valeur de φ en fonction de t pour les deux métaux A et X, BX la courbe ana-

logue pour les deux métaux B et X ; on aura, en vertu de l'équation (2),

$$\varphi(AB) - MP - NP = MN.$$

279. — La force électromotrice du couple AB entre les températures t_1 et t a pour expression

$$E_{t_1}^{t}(AB) = \int_{t_1}^{t} \varphi(t)\,dt = \int_{t_1}^{t} MN \times dt = \text{aire } M_1MNN_1;$$

elle est donc représentée par l'aire du quadrilatère compris entre les courbes AX et BX et les ordonnées correspondant aux deux températures t_1 et t.

Si, la soudure froide restant à une température constante t_1, on fait croître la température t de la soudure chaude, la force électromotrice croît comme l'aire correspondante, jusqu'à ce que la température atteigne la valeur t_n, qui correspond au point de rencontre I des deux courbes.

A cette température t_n le pouvoir thermoélectrique des deux métaux A et B est nul ; on l'appelle le *point neutre*. Quand la température dépasse celle du point neutre, la force électromotrice décroît, puiqu'elle n'est plus représentée que par la différence des deux aires triangulaires qui ont leur sommet en I ; elle devient nulle, en même temps que l'intensité, pour la température t_2 telle que l'on ait

$$\text{aire } M_2IN_2 = \text{aire } M_1IN_1.$$

Enfin, dès que la température de la soudure chaude dépasse t_2, la force électromotrice devient négative et il y a inversion. La température d'inversion dépend donc de la température de la soudure froide.

280. — Les résultats deviennent très simples quand les courbes AX et BX sont des droites. La figure M_1MNN_1 est alors un trapèze, dont la surface a pour valeur

$$P_1P \times \frac{M_1N_1 + MN}{2} = (t - t_1)\frac{\varphi(t_1) + \varphi(t)}{2} = (t - t_1)\varphi\left(\frac{t + t_1}{2}\right).$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\varphi\frac{t+t_1}{2}}{t_n-\frac{t_1+t}{2}}=\frac{\varphi(t)}{t_n-t}=\text{const.}=a,$$

et, par suite,

$$E^t_{t_1}(AB)=a(t-t_1)\left[t_n-\frac{t_1+t}{2}\right].$$

Cette expression est conforme aux expériences de Gaugain (**266**).

Si les droites AX et BX étaient parallèles, on aurait

$$E^t_{t_1}(AB)=A(t-t_1),$$

et le couple serait à marche uniforme.

281. Chaleur spécifique d'électricité. — Supposons maintenant que les variations de potentiel auxquelles est due la force électromotrice soient de deux espèces : des variations brusques, comme celles qui résultent du principe de Volta et qui correspondent au phénomène de Peltier, et des variations continues liées aux variations de température et capables de donner, comme les premières, des phénomènes calorifiques reversibles. Il est évident que, si nous désignons par H les variations de première espèce et par $\int dh$ la somme des variations continues qui existent entre deux points A et B d'un conducteur, la force électromotrice totale aura pour valeur

$$E=\sum H+\sum\int dh.$$

D'après la loi de Magnus, les variations de la seconde espèce entre deux points M et M′ d'un même métal ne dépendent que des températures t et t' et nullement de la résistance intermédiaire. On peut donc poser

$$dh=f(t)\,dt=\sigma\,dt.$$

Si l'intensité du courant est assez faible pour que l'échauffement du circuit, en vertu de la loi de Joule, puisse être considéré comme négligeable, la quantité de chaleur développée ou absorbée pendant l'unité de temps dans la portion du conducteur où se produit la variation dh considérée, sous l'influence du passage d'un courant d'intensité I, aura évidemment pour expression

$$\mathrm{I}dh = \mathrm{I}f(t)\,dt = \mathrm{I}\sigma dt.$$

La quantité σ est la variation de potentiel et, par suite, le travail calorifique qui, pour l'unité de courant, correspond à a une variation de température égale à l'unité ; c'est une fonction caractéristique de la nature du conducteur, mais qui pour chaque conducteur varie avec la température. Sir W. Thom-

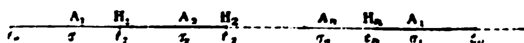


Fig. 69

son a donné à cette nouvelle quantité physique le nom de *chaleur spécifique d'électricité.*

282. Force électromotrice d'un couple thermoélectrique. — Cela posé, considérons un circuit (fig. 69) formé d'un nombre quelconque de métaux $A_1 A_2 \cdots A_n$. Soient $H_1, H_2, \cdots H_n$ les variations brusques correspondant aux forces électromotrices de contact; $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_n$ les chaleurs spécifiques d'électricité des métaux $A_1, A_2, \cdots A_n$; enfin $t_1, t_2, \cdots t_n$ les températures des soudures et t_0 la température constante du fil extérieur. La force électromotrice du circuit a pour expression

$$E = H_1 + H_2 \cdots + H_n + \int_{t_0}^{t_1} \sigma_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \sigma_2 dt \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_n dt + \int_{t_n}^{t_0} \sigma_1 dt,$$

ou, en réunissant en une seule les deux intégrales extrêmes,

$$E = \sum H + \int_{t_n}^{t_1} \sigma_1 d + t \int_{t_1}^{t_2} \sigma_2 dt + \cdots\cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_n dt. \quad (3)$$

Supposons que le circuit ne se compose que de deux mé-

taux A et A′, les forces électromotrices de contact H_1 et H_2 sont en général de signes contraires. En mettant leurs signes en évidence, on aura

$$(4) \qquad E = H_2 - H_1 + \int_{t_1}^{t_2} (\sigma' - \sigma)\, dt.$$

Si la différence des températures des deux soudures est infiniment petite, on a $t_2 - t_1 = dt$, et l'équation devient

$$(5) \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dt} + \sigma' - \sigma = \varphi_t(AA').$$

Nous avons vu que pour un courant infiniment faible le circuit peut être considéré comme une machine thermique reversible; on peut donc appliquer le théorème de Carnot et écrire que la somme algébrique des quotients obtenus en divisant la quantité de chaleur absorbée en un point par la température absolue correspondante est égale à zéro.

Appelons T_2 et T_1 les températures absolues entre lesquelles fonctionne le couple, et T la température absolue d'un point quelconque des conducteurs. A la soudure chaude le travail calorifique est $H_2 I$; à la soudure froide $H_1 I$; sur un élément du conducteur compris entre les températures T et $T + dT$, ce travail est $I\sigma dT$. On aura donc, en supprimant le facteur commun I, l'équation

$$(6) \qquad \frac{H_2}{T_2} - \frac{H_1}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\sigma' - \sigma}{T} dT = 0.$$

Si la différence $T_2 - T_1$ est infiniment petite et égale à dT, on peut écrire

$$(7) \qquad \frac{d}{dT}\left(\frac{H}{T}\right) + \frac{\sigma' - \sigma}{T} = 0.$$

ou

$$\frac{1}{T}\frac{dH}{dT} - \frac{H}{T^2} + \frac{\sigma' - \sigma}{T} = 0,$$

et enfin

$$\frac{H}{T} = \frac{dH}{dT} + \sigma' - \sigma.$$

Le second membre de cette équation n'est autre chose, d'après l'équation (5), que le pouvoir thermoélectrique $\varphi(t)$ des deux métaux; il vient donc

$$H = T\varphi(t). \qquad (8)$$

Ainsi, la force électromotrice de contact de deux métaux, et par suite l'effet Peltier, à une température quelconque, est égale au produit de la température absolue par leur pouvoir thermoélectrique à la même température.

On conclut de cette même équation

$$\frac{dE}{dt} = \varphi(t) = \frac{H}{T},$$

et, par suite,

$$E = \int_{T_1}^{T_2} \varphi dt = \int_{T_1}^{T_2} \frac{H}{T} dT. \qquad (9)$$

283. — La discussion de cette formule conduit aux différents cas examinés par anticipation (**276**). Soit T_n la température qui correspond au point neutre; pour ce point le pouvoir thermoélectrique est nul, on a donc

$$\varphi(t_n) = 0 \quad \text{et} \quad H_n = 0.$$

Tant que la température T_2 de la soudure chaude est inférieure à T_n, la fonction H_2 est positive, et le courant refroidit la soudure chaude.

Quand on a $T_2 = T_n$, l'effet calorifique est nul à la soudure chaude. Si la température T_2 est comprise entre la température T_n du maximum et la température d'inversion T_i, H_2 est négatif; le courant échauffe en même temps et la soudure froide et la soudure chaude.

Enfin, si la soudure chaude est à une température supérieure à celle d'inversion, le courant refroidit les deux soudures.

D'après sir W. Thomson, et conformément aux expériences de Gaugain, la force électromotrice d'un couple peut être

représentée empiriquement par la formule

$$E = a(T - T_1)\left[T_n - \frac{1}{2}(T + T_1)\right].$$

Il en résulte, pour une différence infiniment petite dT entre les températures des deux soudures,

$$\frac{dE}{dT} = a(T_n - T).$$

et, par suite,

$$H = aT(T_n - T).$$

La force électromotrice du couple et la force électromotrice de contact entre les deux métaux, exprimées en fonction de la température, seraient donc toutes deux représentées par des paraboles.

284. Hypothèse de M. Tait. — M. Tait est arrivé au même résultat en admettant que la chaleur spécifique d'électricité σ caractéristique de chaque métal est proportionnelle à la température absolue. On aurait alors, en désignant par k et k' des coefficients constants pour chaque métal,

$$\sigma = kT, \qquad \sigma' = k'T.$$

L'équation (7) devient dans ce cas

$$\frac{d\left(\frac{H}{T}\right)}{dT} + (k' - k) = 0,$$

et on en déduit

$$\frac{H}{T} + (k' - k)T + C = 0.$$

On a d'ailleurs, pour le point neutre, $H_n = 0$, ou

$$(k' - k)T_n + C = 0,$$

ce qui donne finalement, en posant $k' - k = a$ et remplaçant les températures absolues par les températures ordinaires,

$$H = (k' - k) T (T_n - T) = a T (t_n - t),$$
$$E = \int_{T_1}^{T_2} \frac{H}{T} \, dT = (k' - k)(T_2 - T_1) \left[T_n - \frac{T_1 + T_2}{2} \right],$$
$$= a (t_2 - t_1) \left(t_n - \frac{t_1 + t_2}{2} \right).$$

On retrouve ainsi les formules empiriques de sir W. Thomson et de Gaugain.

Le pouvoir thermoélectrique des deux métaux est alors

$$\varphi(t) = \frac{dE}{dt} = \frac{H}{T} = a (t_n - t),$$

il sera donc représenté par une ligne droite en fonction de la température.

Supposons qu'on prenne les pouvoirs thermoélectriques par rapport à un même métal pour lequel k serait nul, et c'est le cas du plomb, comme il semble résulter des expériences de M. Le Roux, l'équation se réduit à

$$\frac{dE}{dt} = \varphi(t) = k' (T_n - T).$$

Les droites qui représentent les pouvoirs thermoélectriques des différents métaux sont inégalement inclinées sur l'axe des températures; elles coupent cet axe au point correspondant à la température du point neutre avec le métal de comparaison, et leur inclinaison sur l'axe est la chaleur spécifique d'électricité correspondant à chacun des métaux.

285. Transport électrique de la chaleur. — Il était important de vérifier par expérience l'hypothèse qui sert de base à cette théorie, savoir l'existence de variations de potentiel dues aux variations de température. Le procédé employé par sir W. Thomson consistait à constater qu'il se produit alors, par le passage d'un courant, des phénomènes calorifiques réversibles analogues à l'effet Peltier.

Considérons une barre de métal, de fer, par exemple, dont la partie médiane AA′ (fig. 70) est maintenue à une température constante T, tandis que les extrêmes B et B′ sont maintenues à 0°.

La distribution des températures est représentée par les courbes BDD′B′; tant que le courant ne passe pas, la distribution est évidemment symétrique et figurée par des courbes telles que BPD et D′P′B′. Le passage du courant produit en chaque point deux effets : 1° un échauffement réglé par la loi de Joule ; 2° un dégagement ou une absorption de chaleur produits par la chute fixe de potentiel qui correspond à la différence des températures de deux points voisins.

Si l'on ne tient compte que de la loi de Joule, la distribution des températures est encore symétrique et peut être représen-

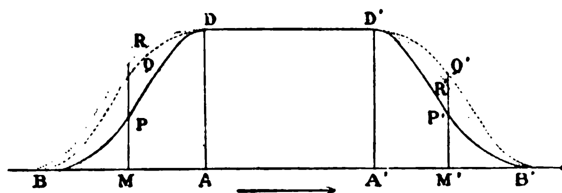


Fig. 70.

tée par les lignes BQD, D′Q′B′ marquées en traits discontinus.

Le second effet est réversible avec le sens du courant. Si le courant va de gauche à droite dans le sens de la flèche, il se produira, par exemple, un nouvel échauffement dans la partie antérieure du fil BA où les températures sont croissantes, et un refroidissement dans la partie postérieure A′ B′ où les températures décroissent. La distribution des températures est alors dissymétrique et peut être figurée par les courbes pointillées BRD et D′R′B′.

En deux points symétriques M et M′ la différence des températures finales t et t' correspond précisément à l'*effet Thomson*. L'échauffement étant plus grand dans la partie antérieure à la région moyenne AA′ où la température est maximum, il y a donc une sorte de *transport électrique de la chaleur* en sens inverse du courant, et ce transport est proportionnel à l'intensité du courant.

Sir W. Thomson a constaté ainsi que, pour le fer, le transport électrique de la chaleur est *négatif*, c'est-à-dire en sens contraire du courant, et que le transport est *positif* mais beaucoup plus faible pour le cuivre.

M. Le Roux a étendu les mêmes observations à un grand nombre de métaux; il a vérifié que l'effet est proportionnel à l'intensité du courant et reconnu qu'il est à peu près nul pour le plomb de sorte qu'à ce point de vue le plomb est sensiblement neutre.

286. Caractère du phénomène de Peltier. — Nous pouvons maintenant revenir avec plus de précision sur le phénomène de Peltier.

La force électromotrice de contact entre deux métaux, d'après la théorie de sir W. Thomson, est exprimée par la formule générale

$$H = T\frac{dE}{dT}.$$

Si le couple est à marche uniforme, on a, pour les deux températures T_1 et T,

$$E = A(T - T_1),$$

et il en résulte

$$H = AT.$$

La force électromotrice de contact entre les deux métaux est alors proportionnelle à la température absolue, et l'effet Peltier doit suivre la même loi. Aux températures de 25° et de 100°, par exemple, on aurait donc

$$\frac{H_{100}}{H_{25}} = \frac{273 + 100}{273 + 25} = 1 + \frac{75}{298} = 1 + \frac{1}{4}.$$

D'après les expériences de M. Le Roux, le couple bismuth-cuivre satisfait assez exactement à cette condition.

Un courant qui traverse une soudure l'échauffe quand il passe dans un sens et la refroidit quand il passe en sens contraire. M. Ed. Becquerel a montré que le sens pour lequel il

y a refroidissement est celui du courant que produirait l'échauffement artificiel de la même soudure. Quand un courant thermoélectrique traverse un circuit, les variations de température produites aux soudures par le courant lui-même tendent donc à l'affaiblir, et on peut dire qu'elles ont pour effet de développer une force électromotrice inverse de celle qui produit le courant. C'est là une relation nécessaire : si elle n'avait pas lieu, un courant accidentel dans un circuit métallique produirait entre les soudures une différence de température qui irait en croissant et le courant s'entretiendrait de lui-même indéfiniment.

Dans un circuit de deux métaux dont la soudure chaude est à une température inférieure à celle du point neutre, la force électromotrice croît avec la température, l'effet Peltier tendra donc à diminuer la température de cette soudure. Au delà du point neutre, au contraire, la force électromotrice diminue quand la température augmente, et l'effet Peltier devra tendre à augmenter la température de la soudure chaude.

L'effet Peltier à la soudure chaude a donc un signe différent suivant que la température de cette soudure est inférieure ou supérieure à celle du point neutre; il en résulte que la force électromotrice de contact H a dû changer de signe au point neutre. C'est par un raisonnement analogue que sir W. Thomson a montré d'abord cette propriété du point neutre et conclu à l'existence nécessaire de forces électromotrices dans un conducteur homogène à températures variables.

TROISIÈME PARTIE — MAGNÉTISME

CHAPITRE PREMIER

PRÉLIMINAIRES

287. Des aimants. — On donne, depuis la plus haute antiquité, le nom de *pierres d'aimant* à certaines pierres naturelles qui ont la propriété d'attirer la limaille de fer; elles sont formées par un oxyde de fer dont la formule chimique est Fe^3O^4. Les différents points d'une pierre d'aimant ne jouissent pas au même degré de ces propriétés attractives : la limaille se porte de préférence sur certains points de la surface et y reste attachée sous forme de houppes.

Ces phénomènes ont une ressemblance évidente avec ceux de l'électricité statique. Toutefois, l'analogie n'est pas complète et l'observation révèle entre eux des différences essentielles : ainsi la pierre d'aimant n'agit pas sur tous les corps indistinctement; la limaille attirée n'est point repoussée après le contact et, une fois détachée, ne jouit d'aucune propriété nouvelle, etc. A chaque pas, dans la suite de cette étude, nous aurons à relever des analogies et des différences de ce genre entre les deux ordres de phénomènes.

Par simple frottement la pierre d'aimant, sans rien perdre de ses qualités primitives, peut aimanter l'acier, c'est-à-dire lui communiquer la propriété d'attirer le fer. Les barreaux

d'acier aimantés artificiellement ayant une forme plus régulière que les pierres d'aimant sont plus commodes pour l'étude ; l'expérience montre d'ailleurs que les phénomènes sont exactement de même nature dans les deux cas.

288. Aimants naturels et artificiels; permanents et temporaires. — On donne le nom général d'*aimant* à tout corps qui a la propriété d'attirer la limaille de fer. Les aimants *naturels* sont les pierres d'aimant que l'on rencontre dans la nature; les aimants *artificiels* sont des morceaux d'acier ou des échantillons de fer plus ou moins pur, auxquels on a communiqué des propriétés analogues.

Parmi les aimants artificiels, les uns conservent cette propriété nouvelle quand on supprime la cause qui l'a provoquée : ce sont les aimants *permanents*. L'acier trempé est le corps qui convient le mieux pour préparer les aimants permanents, et on l'emploie habituellement sous la forme de baguettes allongées ou de barreaux.

Les différentes variétés de fer et de fonte peuvent aussi être aimantées énergiquement par des pierres d'aimant ou des aimants artificiels, mais elles perdent la plus grande partie de leurs propriétés lorsque la cause aimantante a été supprimée. On obtient ainsi des aimants *temporaires*, et on appelle aimantation *résiduelle*, l'aimantation relativement faible qui persiste, au moins pendant quelque temps sur les corps auxquels on a communiqué une aimantation temporaire.

289. Corps magnétiques et corps diamagnétiques. — Jusqu'au siècle dernier le fer était le seul corps dont on connût l'attraction par les aimants; on remarqua ensuite que certains métaux, comme le nickel et le cobalt dont les analogies chimiques avec le fer sont si remarquables, jouissent aussi des mêmes propriétés à un degré moindre. Enfin, à l'aide d'aimants très puissants, on reconnut qu'un très grand nombre de corps sont aussi attirés par les aimants, mais les actions qu'ils éprouvent sont incomparablement plus faibles. On a appelé *magnétiques* tous les corps qui sont attirables à l'aimant, et on a donné le nom de *magnétisme*, soit à l'ensemble des phénomènes auxquels donnent lieu les aimants, soit, par extension, à la cause de ces phénomènes.

En 1778, Brugmans a reconnu qu'un morceau de bismuth est, au contraire, repoussé par un aimant. L'importance de cette observation est restée méconnue jusqu'à ce que Faraday eût découvert dans un certain nombre de corps la même propriété. A cause de la forme particulière sous laquelle il réalisait l'expérience, Faraday a appelé *diamagnétiques* les corps qui sont repoussés par les aimants.

En somme, on peut dire que tous les corps de la nature sont plus ou moins sensibles à l'action des aimants. On les a divisés en deux groupes : les corps *magnétiques*, *paramagnétiques* ou *positifs*, qui sont attirés comme le fer; les corps *diamagnétiques* ou *négatifs*, qui sont repoussés par les aimants comme le bismuth.

290. Distribution du magnétisme dans les aimants. — Pôles. — On peut obtenir un barreau aimanté régulièrement, une aiguille par exemple, en la frottant à plusieurs reprises et toujours dans le même sens avec une pierre d'aimant naturelle ou avec le même point d'un aimant artificiel quelconque.

Quand on plonge une pareille aiguille dans la limaille de fer, les grains de limaille s'attachent surtout aux extrémités de l'aiguille, sur une certaine étendue, et adhèrent les uns aux autres bout à bout, de manière à former des houppes plus ou moins abondantes.

Les actions magnétiques paraissent donc concentrées aux extrémités des aimants réguliers. Nous appellerons ces extrémités les *pôles* de l'aimant, sauf plus tard à définir ce terme avec plus de précision.

291. Des deux espèces de magnétisme. — Les deux extrémités ou pôles de l'aimant ne sont pas de même nature : en effet, tout aimant rendu mobile dans un plan horizontal prend une direction fixe dans l'espace. Cette direction est à peu près du nord au sud. L'aimant écarté de cette direction y revient quand on l'abandonne à lui-même, et c'est toujours la même extrémité qui pointe vers le nord. On appelle pôle *nord* d'un aimant l'extrémité qui se dirige ainsi vers le nord géographique, et pôle *sud* celle qui se dirige vers le sud. On peut donc marquer ces pôles une fois pour toutes sur les aimants permanents dont on fait usage.

292. Lois des actions magnétiques. — Les aimants réagissent les uns sur les autres. Le pôle nord d'un aimant présenté au pôle nord d'un autre aimant mobile le repousse, et attire au contraire le pôle sud. De même les pôles sud de deux aimants se repoussent. Les phénomènes sont donc analogues à ceux des actions électriques : *Deux pôles de même nom se repoussent et deux pôles de noms contraires s'attirent.*

Entre deux aimants voisins, il s'exerce donc quatre actions : deux répulsives entre les pôles de même nom et deux attractives entre les pôles de noms contraires. Si les aimants ont une longueur très grande par rapport à leurs dimensions transversales, et sont situés à une distance notable par rapport à ces mêmes dimensions, on peut considérer l'action de chaque extrémité comme concentrée en un point. L'action réciproque de deux aimants se compose alors de quatre forces dirigées suivant les droites qui joignent deux à deux les centres d'action ou les pôles des deux aimants, et il est impossible en toute rigueur, dans les expériences, de les réduire à un nombre moindre.

Toutefois, en faisant agir l'un sur l'autre les pôles de deux aimants très longs, à des distances assez faibles et dans une position relative convenable pour que les actions des deux autres pôles puissent être considérées comme négligeables, Coulomb a pu établir par l'expérience que *les actions attractives ou répulsives qui s'exercent entre deux pôles sont en raison inverse du carré de leur distance.*

On doit remarquer cependant que rien ne prouve l'existence de ces forces élémentaires. L'expérience montre bien que l'action réciproque des systèmes probablement très complexes qui constituent les aimants peut être réduite à des forces attractives ou répulsives dirigées ainsi suivant les droites qui joignent les pôles; mais, comme un pôle ne peut jamais être séparé de son congénère, l'action directe de deux pôles est une pure conception de l'esprit, avantageuse sans doute pour représenter et calculer les phénomènes, mais sans réalité démontrée par l'expérience. S'il arrive que d'autres vues sur la nature des actions élémentaires conduisent aux mêmes conséquences pour les effets que l'on peut mesurer, si l'on aban-

donne, par exemple, l'idée même d'une action à distance, on devra considérer ces vues nouvelles comme tout aussi légitimes que les premières.

293. Des masses magnétiques. — L'action de deux pôles à une distance donnée dépend de la puissance particulière de chacun des aimants. L'expérience indique que les actions exercées sur les pôles de deux aimants dans des conditions identiques, par un système quelconque, sont dans un rapport constant ; on peut considérer ce rapport comme étant celui des masses magnétiques des deux pôles. Il résulte de cette définition que l'action d'un système quelconque sur un pôle est proportionnelle à sa masse magnétique ; par suite, l'action réciproque de deux pôles est proportionnelle séparément à la masse de chacun d'eux, c'est-à-dire au produit de leurs masses magnétiques.

En désignant ces masses par m et m', l'action f des deux pôles à la distance d a donc pour expression

$$f=\varphi\frac{mm'}{d^2},$$

φ étant un coefficient qui dépend du choix de l'unité de masse. Pour que ce coefficient se réduise à l'unité, il suffit de prendre pour *unité de masse celle d'un pôle qui, agissant sur un pôle identique à l'unité de distance, exerce une répulsion égale à l'unité de force.* On a alors

$$f=\frac{mm'}{d^2},$$

et l'action est répulsive ou attractive suivant que les pôles sont de même nom ou de noms différents.

Si deux pôles de masses m et m' sont liés l'un à l'autre, l'action du système ainsi formé sur un troisième pôle de masse M placé à une distance très grande d par rapport à celle qui sépare les deux pôles juxtaposés, est égale à

$$\frac{m\text{M}}{d^2}+\frac{m'\text{M}}{d^2}=\frac{\text{M}(m+m')}{d^2};$$

elle est proportionnelle à la somme $m+m'$ des deux masses si les pôles sont de même nom, et à la différence $m-m'$ s'ils sont de noms différents. Les masses magnétiques s'ajoutent donc à la manière des quantités algébriques, et on peut les affecter, comme les masses électriques, des signes + et — ; nous conviendrons de donner le signe + à la masse magnétique d'un pôle nord et le signe — à celle d'un pôle sud.

L'action de deux pôles, exprimée par la formule $f=\frac{mm'}{d^2}$, sera positive dans le cas d'une répulsion, les masses étant de même signe, et négative dans le cas d'une attraction.

La loi des actions élémentaires étant la même que pour les phénomènes électriques, on peut appliquer tous les théorèmes relatifs au potentiel électrique, au moins en ce qui concerne les masses fixes et en faisant abstraction pour le moment des phénomènes relatifs aux conducteurs. En particulier, les considérations des lignes de force, des tubes et des flux de force sont immédiatement applicables au magnétisme.

294. Champ magnétique. — Un *champ magnétique* est un espace dans lequel se manifestent des forces magnétiques. La *direction* et l'*intensité* du champ en un point sont la direction et l'intensité de la force qui agirait sur une masse magnétique positive égale à l'unité placée en ce point.

295. Définition des pôles. — Axe magnétique d'un aimant. — Nous avons supposé dans ce qui précède que les actions d'un aimant se réduisaient à celles de deux centres magnétiques situés aux extrémités ; il n'en est ainsi, et encore d'une manière approximative, que dans le cas, que nous avons spécifié, de longs aimants cylindriques très éloignés par rapport à leurs dimensions transversales. En réalité les propriétés magnétiques sont sensibles dans toute l'étendue de l'aimant, et présentent seulement un maximum très marqué dans le voisinage des extrémités. C'est ce qu'on reconnaît facilement à la manière dont la limaille s'attache à l'aimant. On doit donc admettre qu'il y a dans l'aimant une série de masses magnétiques, les unes positives, les autres négatives, distribuées suivant une certaine loi et dont l'ensemble constitue la masse magnétique totale.

Cela posé, on peut définir d'une manière plus précise ce qu'on appelle les pôles d'un aimant.

Supposons l'aimant placé dans un champ magnétique uniforme. Les actions qu'exerce le champ aux différents points sont paralèlles entre elles et, pour chaque élément de volume, proportionnelles à la masse qui s'y trouve. Toutes celles qui agissent sur les masses positives sont de même sens : elles ont une résultante égale à leur somme, parallèle à leur direction est appliquée au centre de masse, ou au centre de gravité, des masses positives. Il en est de même pour les masses négatives sur lesquelles le champ produit des actions parallèles aux précédentes, mais de sens opposé. L'aimant est donc soumis à l'action de deux forces parallèles et de sens contraires, appliquées l'une au centre de gravité des masses positives, l'autre au centre de gravité des masses négatives. Ces deux points d'application sont les *pôles* de l'aimant; on appelle *axe magnétique* de l'aimant la ligne qui joint les deux pôles, et la *direction* de l'axe magnétique est comptée du pôle négatif vers le pôle positif.

L'aimant est évidemment en équilibre stable lorsque son axe magnétique est parallèle à la direction du champ et de même sens; l'équilibre est instable si ces deux directions sont parallèles et de sens contraires.

296. La masse magnétique d'un aimant est nulle. — Le voisinage de la Terre peut être considéré comme un champ magnétique uniforme.

L'expérience montre, en effet, que dans une étendue considérable par rapport aux dimensions des aimants dont on fait usage, mais petite par rapport au rayon de la Terre, tous les aimants, soumis à la seule action de la Terre, tendent à prendre la même direction.

Coulomb a vérifié en outre que, sur tout barreau aimanté, l'action du champ terrestre est purement directrice, qu'elle n'a ni composante verticale ni composante horizontale : elle n'a pas de composante verticale, car le poids d'un barreau d'acier est rigoureusement le même avant et après l'aimantation; la composante horizontale est aussi nulle, car tout aimant rendu mobile dans un plan horizontal n'a aucune tendance à pren-

dre un mouvement de translation. *Les deux forces de sens contraires appliquées aux deux pôles sont donc égales et se réduisent à un couple.* Il en résulte cette conséquence importante que dans tout aimant la somme des masses positives est égale à la somme des masses négatives, autrement dit que *la somme totale des masses magnétiques est nulle.* On a donc toujours $\sum m = 0$.

Sous ce rapport, l'état d'un aimant est comparable à celui que prend par influence un diélectrique, ou un conducteur maintenu isolé.

297. Moments magnétiques. — Soit m la valeur absolue de la masse de chaque pôle, et l la distance des deux pôles; on ap-

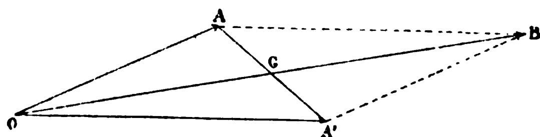


Fig. 71

pelle *moment magnétique* M de l'aimant le produit ml de la masse par cette distance.

On peut représenter un aimant par une droite OA (fig. 71) ayant pour direction l'axe magnétique et pour longueur la valeur numérique du moment magnétique M.

Ce mode de représentation revient à supposer tous les pôles identiques, de masse égale à l'unité, par exemple, et à les placer sur l'axe magnétique à une distance proportionnelle au moment magnétique de l'aimant considéré.

Lorsqu'un système formé de plusieurs aimants liés entre eux est placé dans un champ uniforme, l'action du champ sur chacun des aimants se réduit à un couple; on peut donc, pour évaluer l'action totale, transporter tous les aimants parallèlement à eux-mêmes, par exemple de façon que tous les pôles négatifs soient superposés.

Considérons deux aimants représentés par les droites OA et OA′ (fig. 71) et soit G le milieu de la droite AA′, c'est-à-dire le centre de gravité des deux masses égales à 1 situées en A

et A′. Le système est équivalent à un aimant unique dont la longueur serait égale à OG et les masses égales à 2, ou un aimant de longueur double OB avec des masses égales à 1. L'aimant résultant est ainsi représenté par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites OA et OA′.

Les moments magnétiques des aimants se composent donc comme les forces. Pour un système quelconque d'aimants liés entre eux, le moment résultant est représenté par la droite qui ferme le polygone construit en ajoutant bout à bout les moments de tous les aimants.

La projection de cette ligne sur un axe quelconque étant égale à la somme des projections de toutes les autres, on voit que *l'axe magnétique d'un système quelconque est la droite sur laquelle la somme des projections des moments partiels des aimants qui constituent le système est un maximum.*

De même, on peut remplacer un aimant par un nombre quelconque d'aimants dont le moment magnétique résultant est égal au moment de l'aimant proposé, par exemple, par les trois projections de ce moment magnétique sur trois axes rectangulaires.

Lorsque deux systèmes magnétiques sont très éloignés l'un de l'autre, leur action réciproque est égale à celle des aimants résultants, car chacun des systèmes peut être considéré comme situé dans un champ uniforme produit par l'autre système.

298. Action d'un champ uniforme sur un aimant. — Si l'on considère un aimant de moment $M = ml$ situé dans un champ uniforme dont l'intensité F fait avec l'axe de l'aimant l'angle θ, le moment du couple produit par l'action du champ est égal à $Fml \sin\theta$ ou $FM \sin\theta$. C'est le moment du couple qui tendrait à faire tourner l'aimant autour d'une droite perpendiculaire à l'axe magnétique et à la force du champ.

Si l'aimant est mobile autour d'un axe quelconque, le couple de rotation ne dépend que des projections M_1 et F_1 du moment magnétique et de l'intensité du champ sur un plan perpendiculaire à l'axe, puisque les projections sur l'axe sont sans influence. En appelant θ_1 l'angle des directions de M_1 et de F_1, le moment du couple est égal à $F_1M_1 \sin\theta_1$.

En général, désignons respectivement par a, b, c et α, β, γ les cosinus des angles que font avec trois axes rectangulaires les directions de F et de M, et remplaçons ces deux grandeurs par leurs projections sur les trois axes. Le moment Z du couple qui tend à faire tourner l'aimant autour de l'axe des z est

$$Z = Fb.M\alpha - Fa.M\beta = FM(b\alpha - a\beta).$$

On aurait, de même, pour les autres axes,

$$X = FM(c\beta - b\gamma),$$
$$Y = FM(a\gamma - c\alpha).$$

On appelle quelquefois le produit FM le moment de l'action du champ sur l'aimant ; c'est le moment du couple qui serait

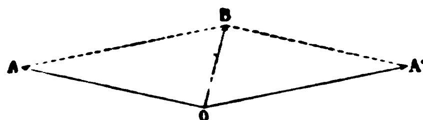


Fig. 72

produit si l'aimant était perpendiculaire à la direction du champ. En particulier, si T est l'intensité du champ terrestre, le produit TM sera le moment de l'action terrestre sur l'aimant.

299. Systèmes astatiques. — Pour deux aimants en particulier (fig. 72), dont les moments magnétiques sont OA et OA', le moment résultant est la diagonale OB du parallélogramme construit sur OA et OA'. Si les moments OA et OA' sont égaux et directement opposés, le moment résultant est nul et l'équilibre est stable pour une direction quelconque du système dans un champ uniforme ; le système est dit *astatique*.

Si les moments OA et OA' sont presque égaux et font un angle voisin de 180°, la résultante OB est très petite et dirigée sensiblement suivant la bissectrice de l'angle AOA' ; elle est donc à peu près perpendiculaire à chacune des aiguilles. Ainsi, lorsque deux aiguilles aimantées, formant un système

quasi astatique, sont situées dans un champ uniforme, elles sont en équilibre stable dans une direction perpendiculaire à la force du champ.

Ce cas est précisément celui des aiguilles magnétiques employées pour certains galvanomètres. Le système est d'autant plus voisin d'être astatique que la direction des aiguilles libres se rapproche plus d'être perpendiculaire au méridien magnétique.

300. Polarité magnétique. — Rupture d'un aimant. — Lorsqu'on brise une aiguille aimantée, chacune des portions devient un aimant complet ayant deux pôles de même intensité et de signes contraires, et le phénomène se répète indéfiniment aussi loin qu'on puisse pousser la division par les moyens mécaniques. Ce fait est capital dans la théorie du magnétisme : il montre d'abord qu'il est impossible d'obtenir une masse magnétique positive ou négative indépendante et qui ne soit pas associée à une masse égale et de signe contraire ; ensuite que le magnétisme est un phénomène essentiellement particulaire. On est conduit à admettre que le magnétisme est dû à une espèce de polarisation des molécules pondérables, dont chacune serait un petit aimant avec ses deux pôles situés rigoureusement sur les faces terminales.

301. Aimantation par influence. — La chevelure de limaille de fer qui reste suspendue à un aimant démontre que chaque parcelle de limaille est devenue elle-même un petit aimant. Le nombre des grains en contact direct avec l'aimant est relativement très petit ; les autres, reliés successivement entre eux et rattachés aux premiers, forment des chaînes où les parcelles sont réunies par leurs pôles de noms contraires. Toutefois l'aimantation acquise par les grains de limaille est passagère ; dès que cette limaille est détachée et éloignée de l'aimant, elle reprend sa neutralité première. De même, un barreau de fer doux s'aimante quand il est placé sur le prolongement d'un aimant et prend deux pôles placés semblablement à ceux de l'aimant, c'est-à-dire que les deux extrémités voisines, de l'aimant et du fer doux, ont des magnétismes de signes contraires. Ce fer doux aimanté peut agir à son tour de la même manière sur un second morceau et ainsi de

suite. Dès qu'on enlève l'aimant primitif, l'aimantation du premier barreau de fer doux et de tous ceux qui le suivent disparaît au moins en plus grande partie, et toutes les actions qu'ils exerçaient les uns sur les autres disparaissent en même temps.

Plus généralement, lorsqu'un corps magnétique quelconque est placé dans un champ magnétique, il devient lui-même un aimant. C'est une aimantation *par influence* ou *induction magnétique*.

L'axe d'aimantation en chaque point est parallèle à la direction de la force résultante. Cette résultante provient de l'action du champ et de celle qui est produite par le magnétisme induit lui-même. Si le corps considéré est infiniment petit, l'aimantation est exactement parallèle à la force du champ, au point considéré.

Il en résulte aussi cette conséquence que l'action d'un aimant est nulle sur un corps neutre et que toute action exercée par les aimants sur les corps magnétiques est précédée d'une induction magnétique sur ces derniers.

On voit encore l'analogie de ce phénomène avec celui de l'induction électrostatique, et particulièrement l'induction sur les diélectriques.

Le magnétisme développé ainsi par induction ne dépend pas seulement de l'intensité du champ, mais aussi de la nature de la substance considérée; l'aimantation, très énergique avec le fer pur et le nickel, est beaucoup plus faible avec tous les autres corps magnétiques.

302. Fer doux. — Force coercitive. — Le fer est dit absolument *doux* si, après avoir été placé dans un champ magnétique très intense, il perd toute son aimantation quand il en est retiré. Le fer doux, au point de vue magnétique, est aussi du fer doux, au sens vulgaire : il peut être facilement courbé, travaillé, et possède peu d'élasticité. Réciproquement, le fer ordinaire n'est pas doux au sens magnétique du mot; lorsqu'il est impur ou qu'il a subi des modifications mécaniques, il reste plus ou moins aimanté, et cette propriété est désignée par le nom assez barbare de *force coercitive*. Un échantillon de fer a une force coercitive d'autant plus grande qu'il con-

serve une plus grande quantité de magnétisme remanent; en même temps, ce fer s'aimante plus difficilement par induction. La force coercitive est donc une propriété analogue au frottement; elle s'oppose, entre certaines limites, aux modifications que les forces extérieures tendent à produire dans l'aimantation et empêche qu'un état d'équilibre unique corresponde à des conditions extérieures données.

Pour l'acier, la force coercitive est très grande; ce métal s'aimante par induction plus difficilement que le fer doux, mais aussi il conserve bien mieux le magnétisme une fois acquis. Les qualités magnétiques de l'acier varient avec la composition du métal et son mode de préparation; elles dépendent beaucoup de la manière dont la trempe a été effectuée, ainsi que du degré de recuit auquel le barreau a été ensuite porté. La force coercitive est d'autant plus grande que l'acier est plus dur et la trempe plus roide.

Jusqu'ici nous avons admis implicitement que le magnétisme d'un aimant est invariable et indépendant des forces auxquelles l'aimant est soumis; mais cette sorte de *rigidité magnétique* est un cas limite qui ne se trouve jamais réalisé en toute rigueur. Lorsqu'un aimant, placé dans un champ magnétique intense, s'y trouve dans sa position normale d'équilibre, son aimantation augmente un peu; elle diminue, au contraire, s'il est dans une direction opposée. Les variations ainsi produites sont faibles en général, et ordinairement passagères, comme celles du fer doux dans les mêmes circonstances; ces variations sont généralement négligeables quand il s'agit de barreaux d'acier fortement aimantés placés dans un champ magnétique peu intense, comme est, par exemple, le champ terrestre.

303. Influence de la température. — La chaleur agit aussi sur le magnétisme des aimants. Une élévation de température modérée diminue le magnétisme, mais d'une manière temporaire, et l'aimant reprend avec sa température initiale son magnétisme primitif. Dans les limites entre lesquelles varie la température ambiante, les effets produits sont sensiblement proportionnels aux variations de la température, de sorte que, si l'on appelle M_0 et M_t les moments magnétiques d'un aimant

aux températures de zéro et de t degrés, on a la relation

$$M = M_0(1 - at),$$

le coefficient a dépendant de la nature de l'acier.

Un échauffement plus grand, dépassant 100° par exemple, produit un affaiblissement définitif du magnétisme, et un barreau d'acier chauffé au rouge vif a ordinairement perdu, quand il revient à la température ordinaire, toute trace d'aimantation.

L'élévation de température produit des effets analogues sur les propriétés magnétiques du fer doux. A la température ambiante, le magnétisme induit dans le fer par un champ déterminé change peu avec les variations de température, mais au delà de 100° la diminution du magnétisme induit devient très rapide. A une température plus élevée que le rouge, le fer ne conserve plus la propriété d'être attiré par les aimants; il n'est donc même plus alors magnétique.

304. Des fluides magnétiques. — Les physiciens du siècle dernier, en particulier Æpinus et Coulomb, ont cherché à expliquer les phénomènes magnétiques par une hypothèse analogue à celle des fluides électriques.

Dans cet ordre d'idées, il est nécessaire d'attribuer aux fluides, aux aimants et aux corps magnétiques un certain nombre de propriétés qui permettent d'expliquer toutes les expériences.

On admet donc l'existence de deux fluides magnétiques impondérables, composés, comme les fluides électriques, de molécules agissant par répulsion sur les molécules de même espèce et par attraction sur les molécules d'espèce différente, les actions réciproques étant en raison inverse du carré de la distance. La combinaison de ces deux fluides en quantités égales est sans action sur les corps extérieurs et constitue ce qu'on appelle le fluide neutre.

En vertu des phénomènes d'induction magnétique, on doit admettre que le fluide neutre existe en quantité presque indéfinie dans les corps magnétiques et se partage en fluides distincts sous l'influence des aimants.

Comme les aimants permanents ou temporaires sont toujours complets, quelles que soient leurs dimensions, il est nécessaire d'admettre aussi que les fluides compris dans un élément de volume ne le quittent jamais, pour passer sur un élément voisin, de sorte que la séparation de ces fluides ne s'effectue que dans l'étendue de chaque molécule.

Enfin, aucune force intérieure étrangère aux actions directes des fluides magnétiques ne s'oppose à leur séparation ou à leur réunion dans le fer doux. Dans le fer impur et dans l'acier, au contraire, il y a une résistance particulière, une sorte de frottement appelé force coercitive qui limite l'aimantation par influence et empêche ensuite la recombinaison des fluides lorsque la force extérieure a disparu.

Il n'y a pas lieu de s'étonner que la théorie des fluides, avec tous ces compléments qui ne s'y rattachent que d'une manière arbitraire, parvienne à expliquer les phénomènes; dans ces conditions, la conformité des expériences avec la théorie n'apporte aucun argument en faveur de l'exactitude des hypothèses; nous n'en ferons d'ailleurs aucun usage.

305. Définition des éléments magnétiques terrestres. — Le champ magnétique qui environne la terre et qu'on peut appeler le champ terrestre, est sensiblement uniforme dans un espace de petites dimensions par rapport à celle du rayon terrestre; mais la direction et l'intensité de la force varient d'un point à un autre. En réalité, la force en un lieu change même avec le temps de grandeur et de direction; nous ne tiendrons pas compte pour le moment de ces variations qui sont faibles, et nous supposerons que l'on considère l'état magnétique du globe à une époque déterminée.

L'axe magnétique d'un aimant suspendu librement par son centre de gravité et soustrait à toute autre action que celle du champ terrestre prendrait, dans sa position d'équilibre, la direction de la force terrestre. Dans nos contrées cette direction est à peu près du sud au nord, et elle est fortement inclinée sur l'horizon, le pôle nord pointant vers le sol.

On appelle *méridien magnétique* en un lieu le plan vertical passant par la direction de la force magnétique terrestre.

La *déclinaison* est l'angle que fait le méridien magnétique

avec le méridien astronomique : la déclinaison est dite *occidentale* lorsque le pôle nord d'un aimant libre se met à l'ouest du méridien géographique qui passe par son milieu ; elle est *orientale* si ce pôle nord est à l'est du méridien.

L'*inclinaison* est l'angle de la force terrestre avec sa projection sur le plan horizontal.

Soient :

D la déclinaison,
I l'inclinaison,
T l'intensité du champ terrestre,
H la composante horizontale $= T \cos I$,
Z la composante verticale $= T \sin I$.

Une aiguille aimantée mobile seulement autour d'un axe vertical n'obéira qu'à la composante horizontale terrestre et viendra se placer de manière que son axe d'aimantation soit dans le méridien magnétique. Si on l'en écarte d'un angle δ, le moment du couple qui tend à l'y ramener a pour valeur, en appelant M le moment magnétique de l'aiguille,

$$HM \sin \delta;$$

il est proportionnel au sinus de l'angle d'écart. Ce résultat a été vérifié par des expériences très précises de Coulomb, au moyen de la balance de torsion.

Si l'aiguille est suspendue librement par son centre de gravité ou mobile autour d'un axe horizontal passant par ce point et perpendiculaire au méridien magnétique, la direction de l'axe magnétique, dans la position d'équilibre de l'aiguille, est la direction même de la force terrestre; l'angle que fait alors son axe magnétique avec l'horizon mesure précisément l'inclinaison.

Supposons maintenant que l'axe horizontal de rotation fasse un angle α avec la normale au méridien magnétique. Nous pouvons remplacer la composante horizontale H par ses deux projections, l'une $H \sin \alpha$ parallèle à l'axe de rotation, l'autre $H \cos \alpha$ perpendiculaire à cet axe. L'aiguille n'obéit qu'aux deux forces Z et $H \cos \alpha$ situées dans le plan qu'elle

décrit; la résultante de ces deux forces a pour valeur

$$T_1 = \sqrt{Z^2 + H^2 \cos^2 \alpha},$$

et l'aiguille dans sa position d'équilibre fait avec l'horizontale un angle i déterminé par la relation

$$\operatorname{cotg} i = \frac{H \cos \alpha}{Z} = \operatorname{cotg} I \cos \alpha.$$

L'angle i est l'inclinaison apparente dans le plan vertical qui fait un angle α avec le méridien magnétique. Si l'on a $\alpha = \frac{\pi}{2}$, il en résulte $i = \frac{\pi}{2}$ et l'aiguille est verticale. Si on fait varier l'angle α de $\frac{\pi}{2}$, on a $\cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin \alpha$, et la nouvelle inclinaison i' a pour valeur

$$\operatorname{cotg} i' = \mp \operatorname{cotg} I \sin \alpha.$$

On déduit de ces deux équations

$$\operatorname{cotg}^2 i + \operatorname{cotg}^2 i' = \operatorname{cotg}^2 I,$$

formule utilisée souvent pour déterminer l'inclinaison.

Si l'aiguille est chargée d'un poids supplémentaire ou, ce qui revient au même, si l'axe de rotation ne passe pas par le centre de gravité, la direction d'équilibre est modifiée.

Supposons, en particulier, qu'un poids p à une distance d de l'axe de rotation maintienne l'aiguille horizontale dans un certain plan, le moment du couple magnétique se réduit au moment de la composante verticale, et la condition d'équilibre est

$$pd = MZ = MT \sin I.$$

Cette condition est indépendante de l'azimut du plan vertical dans lequel se meut l'aiguille ; le contrepoids qui rend l'aiguille horizontale dans un plan, la rendra horizontale dans tous les plans. On peut donc, en plaçant une aiguille sur un

pivot vertical, l'équilibrer de manière qu'elle reste toujours horizontale; mais le moment du contrepoids dépend de la composante verticale, et celui-ci devra être modifié si on veut se servir de l'aiguille sous d'autres latitudes.

306. Distribution du magnétisme terrestre. — Les éléments du magnétisme terrestre, intensité, déclinaison, inclinaison, ne sont pas les mêmes aux différents points du globe. Ces éléments varient en fonction des coordonnées géographiques suivant des lois très compliquées; mais, si l'on s'en tient à une première approximation, les variations peuvent être formulées d'une manière très simple.

Le méridien magnétique d'un lieu coupe la surface du globe suivant un grand cercle; tous les points de ce grand cercle ont le même plan pour méridien magnétique.

Tous les méridiens magnétiques se coupent suivant un même diamètre ; ce diamètre est l'*axe magnétique* de la terre; les points où il perce la surface ont reçu, quoique l'expression soit incorrecte, le nom de *pôles magnétiques*. L'axe magnétique fait un angle de 15° environ avec l'axe de rotation de la terre.

Il est évident que la déclinaison est variable d'un point à un autre sur un même méridien magnétique. Il n'y a d'exception que pour le méridien qui, passant à la fois par l'axe magnétique et l'axe terrestre, se confond avec le méridien géographique ; pour tous les points correspondants la déclinaison est nulle. D'un côté de ce grand cercle, le pôle nord de l'aiguille s'écarte vers l'ouest et la déclinaison est occidentale ; de l'autre, il s'écarte vers l'est et la déclinaison est orientale.

Le grand cercle perpendiculaire à l'axe magnétique est appelé *équateur magnétique*. En tous les points de l'équateur magnétique, la force terrestre est horizontale et l'inclinaison nulle. De part et d'autre l'inclinaison va en augmentant jusqu'aux pôles magnétiques où elle est de 90° : dans l'hémisphère nord, c'est le pôle nord qui s'abaisse vers le sol ; dans l'hémisphère sud, c'est le pôle sud.

307. Hypothèse de l'aimant terrestre. — Biot a cherché s'il était possible de représenter l'état magnétique du globe et la variation des éléments magnétiques à sa surface par l'hypothèse d'un aimant central dirigé suivant l'axe magnétique ;

il a trouvé que les résultats du calcul s'accordent d'autant mieux avec les observations que la distance des pôles de cet aimant fictif est plus petite.

Si l'on remplace ainsi la terre par un aimant infiniment petit par rapport au rayon, c'est-à-dire par deux masses égales et de signes contraires très voisines, on sait (**152**) qu'à la latitude λ, à partir de l'équateur magnétique, l'inclinaison est donnée par l'équation

$$\operatorname{tg} I = 2 \operatorname{tg} \lambda.$$

Quant à l'intensité de la force T en un point quelconque de la surface, elle peut être exprimée en fonction de la force à l'équateur T_e par la formule

$$T^2 = T_e^2 (3 \sin^2 \lambda + 1).$$

Au pôle magnétique l'intensité est $T_p = 2T_e$; elle est donc deux fois aussi grande qu'à l'équateur.

Ces deux formules sont, au moins d'une manière approximative, conformes aux observations faites à un moment donné sur toute la surface de la terre.

Quant au moment magnétique absolu de la terre ϖ, on peut l'obtenir très simplement à l'aide de l'équation

$$\varpi = T_e R^3 = \frac{TR^3}{\sqrt{3 \sin^2 \lambda + 1}},$$

dans laquelle R représente le rayon de la terre.

L'hypothèse d'un aimant terrestre a été introduite dans la science par Gilbert. Le pôle qui se trouverait dans l'hémisphère austral a reçu le nom de pôle austral, il est évidemment de même nature que le pôle nord des aimants; le pôle situé dans l'hémisphère boréal est de même nature que le pôle nord des aimants.

Cette conception de l'aimant terrestre a fait donner aussi le nom de pôle austral au pôle des aiguilles qui se dirige vers le nord, et de pôle boréal à celui qui se dirige vers le sud; dans la théorie des fluides, on dira donc, malgré la contradiction qui

existe dans les termes, qu'un pôle nord contient du fluide austral et un pôle sud du fluide boréal. Mais il vaut mieux renoncer aux expressions *austral* et *boréal*, qui peuvent donner lieu à des équivoques, et appeler, comme nous l'avons fait magnétisme positif celui qui correspond au pôle nord des aimants, et magnétisme négatif celui du pôle sud.

308. — L'hypothèse d'un aimant central infiniment petit n'est qu'une des formes sous lesquelles on peut représenter le magnétisme terrestre; c'est même celle qui présente le moindre degré de probabilité, car la température certainement très élevée du centre du globe est incompatible avec l'existence de corps fortement aimantés.

Nous savons, par exemple, que deux couches hémisphériques superficielles égales et de signes contraires, distribuées de manière à donner en tout point de l'intérieur une force constante, et que nous avons appelées couches de glissement (**157**), produiraient à l'extérieur les mêmes effets que deux masses infiniment voisines. La densité de ces couches aurait pour valeur aux pôles

$$\sigma_0 = \frac{3}{8\pi} T_p = \frac{3}{4\pi} T_e,$$

et, en un point de latitude magnétique λ,

$$\sigma = \sigma_0 \sin\lambda.$$

Dans cette manière de voir, la terre serait donc recouverte de deux couches magnétiques, l'une négative dans l'hémisphère nord et l'autre positive dans l'hémisphère sud, la densité en chaque point étant proportionnelle au sinus de la latitude magnétique.

La masse totale de chacune des couches est exprimée par

$$\pi R^2 \sigma_0 = \frac{3}{4} R^2 T_e;$$

on peut donc la calculer facilement si l'on connaît la valeur absolue de la force à l'équateur.

Nous verrons, par la suite, qu'il existe encore d'autres façons de concevoir le magnétisme terrestre; l'aimant central infiniment petit, inadmissible en lui-même, est donc en réalité l'expression mathématique très simple de plusieurs états équivalents, parfaitement compatibles avec les propriétés connues des corps magnétiques.

309. Variations du magnétisme terrestre. — Les éléments du magnétisme terrestre éprouvent aussi des variations avec le temps; les unes sont purement accidentelles, les autres ont un caractère périodique bien marqué. Les variations à longue période, dites variations séculaires, peuvent être représentées, dans une première approximation, par une rotation de l'axe magnétique autour de l'axe de la terre, rotation en vertu de laquelle l'axe magnétique décrirait de l'est à l'ouest un cône circulaire d'environ 30°.

Comme le pôle magnétique de la terre, qui se trouve aujourd'hui vers la terre du Prince-de-Galles par 100° de longitude ouest, était en 1660 dans le voisinage du cap Nord à 20° de longitude est, on voit que la période de révolution complète serait d'environ 800 ans. La déclinaison à Paris, d'abord orientale, était nulle en 1666; depuis cette époque elle est occidentale et a été en augmentant jusqu'en 1824; elle est actuellement décroissante et redeviendra nulle vers 2050, si le phénomène continue de suivre la même marche: le pôle magnétique sera alors de l'autre côté du pôle nord par rapport à nous. Depuis 1666, l'inclinaison à Paris a toujours été en décroissant: elle atteindra son minimum au moment où la déclinaison deviendra nulle.

Les variations à courte période paraissent liées au mouvement apparent du soleil, de la lune, etc., et suivent des lois qui ne sont pas encore bien connues.

Les valeurs moyennes de la déclinaison, par exemple, ont en un même lieu une oscillation diurne bien marquée avec deux maxima et deux minima. L'amplitude de l'excursion de l'aiguille est beaucoup plus grande pendant le jour que pendant la nuit, et l'heure des déviations extrêmes est très différente suivant la position des stations. Ainsi, tandis que le maximum de déviation du côté de l'ouest a lieu, pour la marche moyenne

annuelle, vers 9 heures du matin à Hobarton (Tasmanie), Batavia, le Cap et Sainte-Hélène, cette époque correspond au contraire au maximum à l'est pour l'hémisphère nord. Le maximum d'excursion à l'ouest se produit vers 1 heure de l'après midi à Toronto (Canada), Londres et Paris; vers 2 heures à Pétersbourg; 3 heures à Nertschinsk et Pékin. Les heures de ces maxima et minima varient d'ailleurs avec les saisons. Les autres éléments du magnétisme, inclinaison et composantes de la force, présentent des oscillations analogues.

En dégageant de la variation diurne moyenne les observations relatives aux différents éléments magnétiques, on peut les rapporter au jour lunaire et on trouve aussi dans les résidus une variation régulière.

Il y a, de même, une variation périodique annuelle.

Enfin les variations accidentelles elles-mêmes, qui semblent se produire simultanément sur une grande étendue sinon sur la totalité de la surface du globe, et qu'on désigne habituellement sous le nom de perturbations ou d'orages magnétiques, paraissent également soumises dans leurs effets moyens à certaines périodes annuelles ou séculaires. Ces perturbations sont en relation directe avec le phénomène des aurores polaires et accompagnées de courants accidentels dans les fils télégraphiques.

CHAPITRE DEUXIÈME

CONSTITUTION DES AIMANTS

310. Filets magnétiques. — L'expérience de la rupture d'un barreau aimanté met en évidence ce fait capital que tout élément de volume d'un aimant est lui-même un aimant complet ayant, dans son état actuel, un axe magnétique et un moment déterminés. Nous disons dans son état actuel, car il est évident que, si l'élément de volume, au lieu d'être séparé par la pensée du milieu environnant, en était détaché en réalité, il ne conserverait plus le même état que lorsqu'il faisait partie de la masse générale. Considérons deux molécules ou éléments magnétiques placés bout à bout et en contact par leurs pôles de noms contraires; si elles sont également aimantées, l'action pour tout point extérieur se réduit à celle des deux extrémités libres. De même, si une série de molécules également aimantées sont placées bout à bout, tous les axes magnétiques étant disposés suivant une même ligne, l'action extérieure de l'aimant linéaire ainsi construit se réduit encore à celles des deux extrémités, chaque point intermédiaire donnant lieu à des actions égales et contraires qui s'annulent. Un pareil assemblage de particules aimantées constitue un *filet magnétique uniforme*.

311. Magnétisme libre. — Mais si, dans cette file de molécules, l'aimantation est variable, il y aura en chaque point une certaine quantité de magnétisme apparent ou *libre*, égal à la différence des masses magnétiques des deux molécules voisines en contact. Si l'on suppose, par exemple, que l'ai-

mantation aille en diminuant depuis le milieu du filet jusqu'aux extrémités, on voit qu'il y aura sur l'une des moitiés de l'aimant linéaire un excès de magnétisme positif distribué suivant une certaine loi, et sur l'autre moitié un excès égal de magnétisme négatif. Le filet magnétique ainsi construit n'est plus uniforme, mais il est évident qu'on pourra le considérer comme résultant de la juxtaposition de filets uniformes de longueurs différentes.

312. Aimant uniforme. — Un aimant de dimensions finies qui serait formé de filets identiques entre eux juxtaposés parallèlement, pourrait être appelé un aimant *uniforme ;* les pôles des filets élémentaires étant situés aux extrémités, sur la surface du corps, on voit que l'action de l'aimant tout entier se réduirait à celle de deux couches magnétiques distribuées sur la surface suivant une loi simple.

313. Aimant quelconque. — En un point P d'un aimant quelconque, l'axe magnétique a une direction déterminée et cette direction varie d'une manière continue ; on peut donc tracer dans l'intérieur de l'aimant des lignes tangentes en chaque point à l'axe magnétique et imaginer des filets magnétiques dirigés suivant ces lignes d'aimantation.

L'aimant sera ainsi subdivisé, soit en filets magnétiques non uniformes fermés ou aboutissant à la surface, soit en filets uniformes, les uns fermés, d'autres aboutissant à la surface, d'autres enfin terminés à l'intérieur. Tant qu'on ne fait aucune hypothèse sur la forme des filets, cette conception est la traduction pure et simple des faits et ne présente rien d'hypothétique. Elle conduit à considérer un aimant quelconque comme formé d'une couche magnétique distribuée sur la surface et de masses magnétiques disséminées dans l'intérieur. Il y a donc lieu de considérer une densité superficielle du magnétisme et une densité cubique.

La densité du magnétisme libre en un point est la limite du rapport de la masse magnétique contenue dans un élément de volume pris autour de ce point, au volume lui-même ; la densité superficielle est le quotient de la quantité de magnétisme qui existe sur un élément de surface autour de ce point par l'aire de l'élément.

314. Potentiel d'un aimant. — Cela posé, il est évident que le potentiel de l'aimant en un point extérieur quelconque P aura pour valeur

$$V = \int \frac{\sigma}{r} dS + \int \frac{\rho}{r} dv. \qquad (1)$$

Dans la première intégrale, qu'on étendra à toute la surface de l'aimant, σ désigne la densité superficielle sur l'élément de surface dS dont la distance au point P est égale à r. La seconde intégrale doit être étendue à tout le volume de l'aimant, ρ désignant la densité cubique du magnétisme dans l'élément dv situé à une distance r du point P. Ces densités ρ et σ peuvent être considérées comme celles d'un fluide particulier.

Comme la somme des masses magnétiques est toujours nulle pour un aimant quelconque, on a l'équation de condition

$$0 = \int \sigma dS + \int \rho dv.$$

Les composantes de la force magnétique au point P sont

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x},$$
$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$
$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z};$$

et cette force elle-même a pour valeur

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}.$$

Ces formules sont générales et s'appliquent aussi bien aux points situés dans l'intérieur de l'aimant qu'aux points extérieurs.

On démontrerait, comme en électricité, que la somme ΔV des trois dérivées secondes partielles du potentiel est égale à

zéro pour tout point extérieur, et à $-4\pi\rho$ pour tout point intérieur aux corps aimantés.

Les équations fondamentales sont les mêmes que pour l'électricité statique. Nous pourrons donc, sans nouvelle démonstration, appliquer les théorèmes déjà établis, à la condition que ces théorèmes ne dépendent point des propriétés des conducteurs et que, d'autre part, la force coercitive n'ait pas à intervenir.

315. Un aimant équivaut à une surface magnétique. — On démontre ainsi d'une manière immédiate ce théorème de Poisson, que l'action d'un aimant sur tout point extérieur est équivalente à celle d'une couche fictive, de masse totale égale à zéro, distribuée à la surface suivant une certaine loi.

Supposons, en effet, que les masses en question soient des masses électriques fixes et qu'on recouvre l'aimant d'une surface conductrice infiniment mince en communication avec le sol. Il se développera par influence sur la surface interne du conducteur une couche de signe contraire aux masses intérieures; comme la force et le potentiel sont maintenant nuls partout à l'extérieur, la couche induite a sur tout point extérieur un potentiel égal et de signe contraire à celui des masses primitives, et cette couche est égale à la somme algébrique des masses primitives. Une couche égale et de même signe, distribuée sur la surface extérieure suivant la même loi, donnera donc un potentiel égal et de même signe et formera, par suite, un système équivalent pour les points extérieurs au système proposé. La conclusion s'applique évidemment au magnétisme, puisque les deux espèces de masses obéissent à la même loi élémentaire.

Les actions extérieures exercées par l'aimant permettront de calculer la densité de cette couche fictive superficielle, mais n'apprendront rien sur la distribution réelle du magnétisme. Pour connaître cette distribution, il faudrait déterminer aussi par expérience les forces qui agissent à l'intérieur de l'aimant, et y creuser des cavités dans lesquelles on introduirait des aiguilles d'épreuve; mais la soustraction d'une masse, si petite qu'elle soit, modifie la force dans la cavité, parce qu'on supprime des masses très voisines dont l'effet n'est pas négli-

geable. L'aimant équivaut alors à deux couches fictives, l'une sur la surface extérieure et l'autre sur les parois internes de la cavité ; la somme ΔV des trois dérivées secondes du potentiel est devenue nulle dans cette région, tandis qu'elle y était primitivement égale à $-4\pi\rho$.

316. Théorie de Poisson. — Nous n'avons jusqu'ici fait aucune hypothèse sur la manière dont les masses magnétiques sont distribuées dans la substance aimantée. Pour établir la théorie de l'aimantation par influence, Poisson considère un corps aimanté comme formé de particules magnétiques disséminées dans un milieu imperméable au magnétisme. Ces particules sont sphériques et équidistantes, si le corps est isotrope et homogène; chacune d'elles renferme des quantités égales des fluides positif et négatif, partie à l'état neutre à l'intérieur, partie à l'état libre à la surface. Le moment magnétique de chaque particule de volume u peut être représenté par uq, le facteur q dépendant du degré d'aimantation. Si l'on considère un volume dv, très grand par rapport aux dimensions des particules, mais infiniment petit par rapport aux dimensions de l'aimant, toutes les particules qu'il renferme auront leurs axes magnétiques sensiblement parallèles, et le moment magnétique de l'élément de volume sera la somme des moments des particules. En appelant h, comme nous l'avons fait déjà (**167**), le rapport de l'espace occupé par les particules au volume total dv, cet élément de volume renfermera un nombre de particules égal à hdv, et son moment magnétique sera $hqdv$. Cet élément se comportera pour tout point situé à une distance finie comme un aimant infiniment petit, ou comme l'ensemble de deux masses égales et contraires infiniment voisines (**151**). Le moment magnétique de l'aimant par unité de volume est égal à hq.

La valeur du rapport h varie d'un corps magnétique à un autre et, pour un même corps, la valeur de q en chaque point dépend du degré d'aimantation : les actions extérieures augmentent ou diminuent avec le produit hq. Dans les corps qui ne présentent pas de force coercitive, rien ne s'oppose au mouvement des fluides à l'intérieur d'une particule magnétique; l'équilibre ne peut donc subsister que si la résultante

de toutes les forces tant intérieures qu'extérieures est nulle en tout point de la molécule ; au contraire, dans un corps doué d'une force coercitive qui agit à la manière du frottement, il suffit que cette résultante soit inférieure à la valeur donnée de la force coercitive.

La théorie de Poisson n'est pas liée à l'hypothèse des deux fluides, mais il est plus difficile de la dégager de cette conception particulière sur la structure des milieux magnétiques.

317. Théorie de Sir W. Thomson. — Nous exposerons de préférence la théorie du magnétisme sous la forme que lui a donnée Sir W. Thomson. Cette théorie, dans ses résultats essentiels, coïncide avec celle de Poisson, mais elle a l'avantage d'être tout d'abord indépendante de l'idée de fluide et de toute hypothèse sur la constitution du milieu, de sorte qu'elle paraît se rapprocher davantage des faits expérimentaux. L'idée fondamentale est de considérer une portion quelconque d'un corps aimanté comme un aimant complet défini par la direction de l'axe et par son moment magnétique, c'est-à-dire comme un aimant infiniment petit ayant des masses $+m$ et $-m$ à ses extrémités, une longueur ds et, par suite, un moment magnétique égal à mds.

318. Intensité d'aimantation. — Cela posé, on appelle *intensité d'aimantation* I en un point le quotient du moment magnétique d'un élément de volume par le volume lui-même, en d'autres termes la valeur du moment par unité de volume. On aura ainsi

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{I} = \frac{mds}{dv}.$$

Cette intensité I représente le produit hq de la théorie de Poisson.

L'intensité d'aimantation est une grandeur géométrique définie, comme une force, par sa direction, qui est l'axe magnétique de l'élément de volume, et par sa valeur numérique ; elle sera donc représentée en chaque point par une droite de direction et de longueur déterminées.

Tous les phénomènes du magnétisme peuvent être exprimés en fonction de cette quantité seule.

319. Expression du potentiel. — Soit I l'intensité d'aimantation en un point M de l'aimant dont les coordonnées sont x, y et z. Si l'intensité d'aimantation fait avec les axes des angles dont les cosinus soient λ, μ, ν, ses composantes A, B et C suivant les axes auront pour expressions

$$A = I\lambda,$$
$$B = I\mu,$$
$$C = I\nu.$$

Le moment magnétique d'un élément de volume est $mds = Idv$. Son potentiel en un point P situé à la distance r sur une droite faisant un angle θ avec la direction de l'axe magnétique, c'est-à-dire avec la direction de l'intensité d'aimantation, est égal à (**151**)

$$dV = Idv \frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Ce potentiel peut être considéré comme la somme des potentiels dV_a, dV_b, dV_c, dus aux trois composantes A, B et C de l'aimantation. Si on désigne par δ l'angle de la droite MP avec l'axe des x et par ξ, η, ζ les coordonnées du point P, on a

$$dV_a = \frac{Adv\cos\delta}{r^2} = \frac{Adv(\xi - x)}{r^3}.$$

D'autre part, l'équation

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = r$$

donne

$$(\xi - x) = -r\frac{\partial r}{\partial x},$$

et, par suite,

$$\frac{\xi - x}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}.$$

On en déduit

$$dV_a = Adv\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = A\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}dx\,dy\,dz.$$

On aurait de même

$$dV_y = B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dx\,dy\,dz,$$

$$dV_z = C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dx\,dy\,dz.$$

Le potentiel de l'aimant entier s'obtiendra en étendant ces expressions au volume total, ce qui donne

$$(3) \qquad V = \int\!\!\int\!\!\int \left(A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz.$$

Le potentiel au point P se trouve ainsi exprimé en fonction

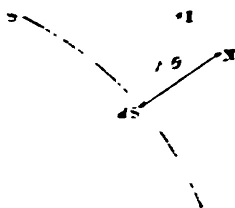


Fig. 73

de la distance r de ce point aux différents éléments de volume de l'aimant et de l'intensité de l'aimantation.

Chacun des termes dont se compose le second membre de l'équation (3) renferme un facteur qui est une différentielle exacte et peut être intégré par parties ; on obtient alors

$$V = \int\!\!\int \frac{A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy}{r} - \int\!\!\int\!\!\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

la première intégrale devant être étendue à toute la surface et la seconde au volume de l'aimant.

Soient I l'intensité de l'aimantation en un point de la surface S (fig. 73) et θ l'angle que fait sa direction avec la normale; α, β, γ les cosinus des angles de la normale avec les axes; enfin dS un élément de surface au point considéré, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{I}d\mathrm{S}\cos\theta &= \mathrm{I}d\mathrm{S}(\alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu) \\ &= \mathrm{I}\lambda.\alpha d\mathrm{S}+\mathrm{I}\mu.\beta d\mathrm{S}+\mathrm{I}\nu.\gamma d\mathrm{S}. \end{aligned}$$

Les produits $\mathrm{I}\lambda$, $\mathrm{I}\mu$, $\mathrm{I}\nu$ sont les composantes de l'aimantation, et αdS, βdS, γdS les projections de l'élément de surface sur les plans coordonnés. On a donc

$$\mathrm{I} = \mathrm{A}dy\,dz + \mathrm{B}dz\,dx + \mathrm{C}dx\,dy,$$

et l'expression du potentiel devient

$$(4) \qquad \mathrm{V} = \int \frac{\mathrm{I}\cos\theta}{r}\,d\mathrm{S} - \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Les formules (1) et (4) représentent le même potentiel; si on les identifie, on voit que la densité superficielle et la densité cubique du magnétisme peuvent s'exprimer en fonction de l'intensité d'aimantation de la manière suivante :

$$(5) \qquad \sigma = \mathrm{I}\cos\theta = \mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta+\mathrm{C}\gamma,$$

$$(6) \qquad \rho = -\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial z}\right).$$

Ainsi, *la densité superficielle du magnétisme est égale à la projection sur la normale à la surface de l'intensité d'aimantation au même point;*

La densité cubique est égale et de signe contraire à la somme des dérivées partielles des composantes de l'aimantation par rapport aux trois axes.

Les quantités ρ et σ, qui représentent les densités d'un fluide dans l'hypothèse de Coulomb, peuvent être considérées comme

des quantités purement mathématiques. Ce sont deux symboles définis par les équations (5) et (6) ; pour abréger le langage, on leur conservera le nom de densités, mais sans attacher à ce mot sa signification littérale.

Remarquons que l'équation de Poisson relative aux dérivées secondes devient, dans le cas actuel,

$$\Delta V = -4\pi\rho = 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

Pour un point extérieur le second membre est identiquement nul, puisque l'intensité d'aimantation est constante et égale à zéro.

320. Aimants uniformes. — Considérons le cas particulier où l'aimantation est *uniforme*, c'est-à-dire, où l'intensité d'aimantation est constante en grandeur et en direction dans toute l'étendue de l'aimant ; les dérivées des composantes A, B, C sont nulles et l'équation (6) donne

$$\rho = 0;$$

il n'y a donc de magnétisme qu'à la surface.

Le potentiel se réduit alors à

$$V = I\int \frac{dS\cos\theta}{r},$$

ou, en appelant dS_1 la projection de dS sur un plan normal à l'aimantation,

$$V = I\int \frac{dS_1}{r}.$$

Tous les éléments de volume étant aimantés parallèlement, le moment magnétique de l'ensemble est égal à la somme des moments de tous les volumes élémentaires ; on a donc

$$\varpi = \int I\,dv = I\int dv = vI.$$

Ainsi, *le moment magnétique d'un aimant uniforme est égal au produit du volume par l'intensité d'aimantation.*

L'expression de la densité superficielle

$$\sigma = I \cos\theta$$

montre que l'action extérieure d'un corps aimanté uniformément est équivalente à celle de deux couches de glissement (157), c'est-à-dire des deux couches qui résulteraient de la superposition de deux masses magnétiques homogènes, de densités $\pm\rho$ égales et de signes contraires, dont la partie positive aurait glissé, parallèlement à l'aimantation, d'une quantité δ telle qu'on ait $\rho\delta = I$.

Nous avons dit (308) qu'on pouvait expliquer l'action de la terre par un aimant infiniment petit placé au centre, ou par deux couches de glissement; on voit qu'on pourrait aussi supposer la terre uniformément aimantée, cette dernière condition étant équivalente aux deux autres.

321. Force dans l'intérieur d'un aimant. — On ne peut déterminer l'action magnétique dans la substance même d'un aimant sans creuser une cavité qui permette d'y placer un petit aimant d'épreuve ; mais la création d'une surface libre à l'intérieur de l'aimant équivaut à la formation d'une couche superficielle, ayant en général une action finie sur les points qu'elle renferme, et cette action dépend de la forme de la cavité.

Une masse placée dans la cavité est alors située en dehors des masses agissantes, et la force qu'elle subit peut être déterminée à la manière ordinaire. Cette force est la résultante de deux autres, l'une due aux masses extérieures et l'autre à la couche superficielle de la cavité; la seconde force dépend de la forme et de l'orientation de la cavité tandis que la première en est indépendante.

L'intensité d'aimantation peut d'ailleurs être considérée comme constante en grandeur et en direction dans toute l'étendue du volume infiniment petit que l'on enlèvera; il sera donc possible de déterminer la seconde force pour certaines formes simples de la cavité.

322. — Considérons d'abord une cavité cylindrique dont les génératrices soient parallèles et les bases normales à l'intensité d'aimantation. La densité de la couche fictive sera nulle sur les parois latérales, puisque la composante normale de l'aimantation est nulle en chaque point ; sur les deux bases, qui sont perpendiculaires à l'aimantation, la densité sera uniforme, égale à $+\mathrm{I}$ sur l'une et $-\mathrm{I}$ sur l'autre. Si l'étendue de la base est égale à a, il y aura aux deux extrémités du cylindre des masses magnétiques égales et contraires $+a\mathrm{I}$ et $-a\mathrm{I}$.

Supposons le cylindre circulaire : soit r le rayon de la base et $2h$ la hauteur ; l'action des deux couches sur un point situé au milieu de l'axe est le double de celle d'un disque homogène sur un point de la perpendiculaire élevé en son centre. Pour calculer cette action, supposons la densité égale à l'unité et le disque partagé en zones élémentaires concentriques ; l'action d'une de ces zones située à une distance ρ du point considéré a pour composante suivant l'axe

$$df = \frac{2\pi r dr}{\rho^2} \cdot \frac{h}{\rho},$$

ou, en tenant compte de la relation $\rho^2 = r^2 + h^2$,

$$df = 2\pi h \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

En intégrant entre les limites $\rho = h$ et $\rho = \sqrt{r^2 + h^2}$, on obtient

$$f = 2\pi\left(1 - \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right);$$

on aura donc pour l'action des deux couches

$$\mathrm{R} = 2f\mathrm{I} = 4\pi\mathrm{I}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right).$$

Deux cas sont particulièrement intéressants, ceux où l'une des deux quantités h et r est très grande par rapport à l'autre.

Lorsque le cylindre est très allongé, le rapport $\frac{r}{h}$ est très petit et la valeur de R tend vers zéro. Alors la force réelle qui agit dans la cavité se réduit à l'action des masses extérieures. Un cylindre infiniment étroit à base quelconque donnera évidemment le même résultat; il en sera encore de même si l'on imagine dans l'aimant une section par une surface parallèle en chaque point aux lignes d'aimantation et qu'on suppose un intervalle infiniment mince entre les deux parties séparées.

Lorsque le cylindre a la forme d'un disque plan, le rapport $\frac{h}{r}$ est très petit et, à la limite, la valeur de R devient

$$R = 4\pi I.$$

Les composantes de cette force parallèles aux axes sont

$$R_x = 4\pi A,$$
$$R_y = 4\pi B,$$
$$R_z = 4\pi C.$$

Ces valeurs conviendront encore au cas d'une section infiniment mince faite dans l'aimant perpendiculairement aux lignes d'aimantation.

Si la cavité a la forme d'une sphère, les parois seront recouvertes de deux couches égales et contraires distribuées comme des couches de glissement; l'action R de cette couche sur tout point intérieur est constante, parallèle à l'aimantation et a pour expression

$$R = \frac{4}{3}\pi\sigma_0 = \frac{4}{3}\pi I.$$

Pour une fente étroite dont la normale fait avec la direction de l'aimantation un angle θ, la force intérieure des couches superficielles est normale à la fente et égale à

$$4\pi\sigma = 4\pi I \cos\theta.$$

L'influence de la forme de la cavité est bien manifeste dans ces différents exemples.

323. Force magnétique. — Dans le cas d'une cavité cylindrique allongée, ou d'une fente parallèle aux lignes d'aimantation, la force en un point ne dépend que du potentiel V des masses extérieures à l'élément de volume enlevé. Les composantes de cette force F sont

$$X = -\frac{\partial V}{dx}, \quad Y = -\frac{\partial V}{dy}, \quad Z = -\frac{\partial V}{dz}.$$

C'est à la force ainsi définie que l'on convient d'attribuer d'une manière spéciale le nom *force magnétique* ou *force résultante en un point de la masse aimantée.*

324. Induction magnétique. — Si la cavité est un cylindre très aplati ou une fente infiniment mince perpendiculaire aux lignes d'aimantation, les composantes de la force réelle F_1 ont pour valeurs

$$(7) \qquad \begin{aligned} X_1 &= X + R_x = X + 4\pi A, \\ Y_1 &= Y + R_y = Y + 4\pi B, \\ Z_1 &= Z + R_z = Z + 4\pi C. \end{aligned}$$

Cette force F_1 joue un rôle important dans l'étude de l'aimantation par influence ; on l'appelle *induction magnétique.*

La somme des trois dérivées partielles de la fonction F_1 donne l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} &= -\Delta V + 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) \\ &= 4\pi\rho - 4\pi\rho = 0. \end{aligned}$$

Ainsi l'induction magnétique satisfait à l'équation de Laplace pour tous les points tant intérieurs qu'extérieurs aux milieux aimantés. D'ailleurs elle se confond évidemment avec la force magnétique, pour tous les points extérieurs, puisque l'aimantation I et ses composantes A, B et C sont alors égales à zéro. L'induction magnétique jouit donc des mêmes propriétés que l'induction électrostatique (**115**).

On appellera *ligne d'induction* une ligne à laquelle la force d'induction est tangente en chaque point ; *tube d'induction* un canal limité latéralement par des lignes d'induction ; enfin, *flux*

d'induction au travers d'un élément de surface le produit de la surface de l'élément par la composante normale de l'induction. Puisque l'induction satisfait à l'équation de Laplace pour tous les points intérieurs et extérieurs, il en résulte que le flux d'induction est une quantité constante dans toute l'étendue d'un tube d'induction.

325. Différentes espèces d'aimants. — On peut diviser les aimants en catégories distinctes suivant la manière dont varie l'intensité d'aimantation.

326. Solénoïdes magnétiques. — On appelle *solénoïde simple* un aimant ayant la forme d'un filet à section constante, infiniment petite, en chaque point duquel l'intensité d'aimantation est elle-même constante et tangente à la direction du filet.

La densité magnétique est nulle dans toute l'étendue du filet et sur sa surface latérale (**310**) ; aux extrémités seule-

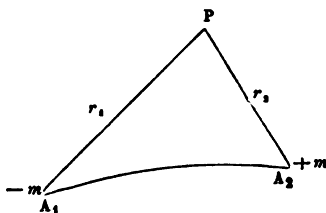


Fig. 74

ment existent deux masses magnétiques égales et de signes contraires ; si I est l'intensité d'aimantation et a la section du filet, ces deux masses ont pour valeur absolue

$$m = a\text{I}.$$

On peut appeler le produit aI la *puissance magnétique* du solénoïde.

Si, la section du filet et l'intensité d'aimantation étant variables, le produit aI restait constant, le système constituerait encore un solénoïde magnétique simple.

Un solénoïde simple se comporte pour tous les points exté-

rieurs comme un aimant dont les pôles seraient situés rigoureusement aux extrémités.

Le potentiel en un point P (fig. 74), à une distance r_2 du pôle positif A_2 et à une distance r_1 du pôle négatif A_1, a pour expression

$$V = m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = aI\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Si un pareil solénoïde est fermé, le potentiel est nul partout à l'extérieur ; par suite la force est nulle, et l'on ne peut découvrir le magnétisme qui existe dans le système qu'en le brisant en un point et séparant les extrémités.

327. — Un filet magnétique à section constante ou variable, tangent en chaque point à la direction de l'aimantation, et dans lequel la puissance magnétique n'est pas constante, constitue un solénoïde *complexe*. Un pareil système peut être considéré comme la réunion en faisceau de plusieurs solénoïdes simples de longueurs inégales.

Un élément de longueur ds (fig. 75), dont la puissance

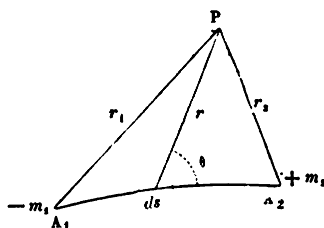


Fig. 75

magnétique est $m = aI$, a pour potentiel en un point extérieur P

$$dV = \frac{mdS}{r^2}\cos\theta = -m\frac{dr}{r^2} = -aI\frac{dr}{r^2}.$$

Le potentiel en P du filet total est donc

$$V = \int_{A_1}^{A_2} -\frac{mdr}{r^2}.$$

En intégrant le second membre par parties et désignant

par $-m_1$ et $+m_2$ les masses des extrémités A_1 et A_2, on obtient

$$V=\frac{m_2}{r_2}-\frac{m_1}{r_1}-\int_{A_1}^{A_2}\frac{1}{r}\frac{dm}{ds}ds.$$

Le potentiel est le même que s'il y avait en chaque point du filet une densité linéaire λ définie par la relation

$$\lambda=-\frac{dm}{ds}=-\frac{d(al)}{ds},$$

et l'on peut écrire

$$V=\frac{m_2}{r_2}-\frac{m_1}{r_1}+\int\frac{\lambda ds}{r}.$$

328. Aimants solénoïdaux. — Un aimant est dit *solénoïdal* lorsqu'il peut être divisé en solénoïdes simples aboutissant à la surface ou fermés sur eux-mêmes. Il n'y a pas de magnétisme libre à l'intérieur de l'aimant; la distribution est purement superficielle.

La densité cubique ρ étant nulle, on a

$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0. \tag{8}$$

Réciproquement, si la condition (8) est satisfaite, la densité est nulle en tout point intérieur et l'aimant est solénoïdal.

329. Feuillets magnétiques. — On appelle *feuillet magnétique simple* un aimant constitué par deux surfaces infiniment voisines équidistantes, chargées de couches magnétiques uniformes, égales et de signes contraires; ou encore un aimant formé de deux couches infiniment voisines non équidistantes, toujours égales et de signes contraires, et telles que la densité en chaque point soit en raison inverse de leur distance.

Si on désigne par h l'épaisseur du feuillet en un point et par σ la densité de la couche, le produit $h\sigma$ doit être constant; on l'appelle la *puissance magnétique* du feuillet.

On peut dire encore qu'un feuillet magnétique simple est une lame infiniment mince dont l'aimantation est en chaque point normale à la surface et a une intensité inversement proportionnelle à l'épaisseur.

Si on représente par Φ la puissance magnétique du feuillet, on a donc

$$\Phi = h\sigma = h\mathrm{I}.$$

La portion du feuillet qui correspond à un élément $d\mathrm{S}$ peut être considérée comme un aimant infiniment petit de moment

$$h\sigma d\mathrm{S} = \Phi d\mathrm{S}.$$

Le potentiel au point P (fig. 76) de cet élément du feuillet a pour expression

$$d\mathrm{V} = \frac{h\sigma d\mathrm{S}}{r^2}\cos\theta = \frac{\Phi d\mathrm{S}}{r^2}\cos\theta,$$

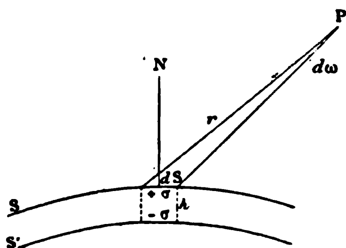


Fig. 76

θ étant l'angle de la normale N menée extérieurement à la surface positive avec la droite r qui joint le point P à l'élément $d\mathrm{S}$.

L'angle solide $d\omega$, sous lequel du point P on voit l'élément $d\mathrm{S}$, est donné par l'équation

$$d\mathrm{S}\cos\theta = r^2 d\omega, \qquad \text{ou} \qquad d\omega = \frac{d\mathrm{S}\cos\theta}{r^2}.$$

Il en résulte

$$d\mathrm{V} = \Phi d\omega.$$

Comme le facteur Φ est constant, le potentiel du feuillet en P a pour expression

$$V = \Phi\omega. \tag{9}$$

Il importe de bien définir la signification de l'angle solide ω. Le potentiel dV est positif ou négatif suivant que le point P voit la surface positive ou la surface négative de l'élément dS du feuillet, c'est-à-dire suivant que l'angle θ est aigu ou obtus. L'angle $d\omega$, considéré lui-même comme positif ou négatif dans les mêmes conditions, est la surface découpée sur une sphère de rayon égal à l'unité ayant pour centre le point P par un cône limité au contour de l'élément; c'est la *surface apparente* de cet élément. L'angle ω, ou la surface apparente du feuillet total est, par suite, déterminé par un cône limité au contour même du feuillet; il est positif ou négatif, suivant que la portion de feuillet que voit le point P à travers le contour est elle-même positive ou négative. Le potentiel du feuillet est donc indépendant de sa forme; il ne dépend que de sa puissance magnétique et de son contour. Il en résulte ce théorème important de Gauss :

Le potentiel d'un feuillet magnétique simple en un point extérieur est égal au produit de la puissance magnétique du feuillet par sa surface apparente vue de ce point.

Pour que le potentiel soit nul en un point, il faut et il suffit que la surface apparente du feuillet soit nulle.

La surface apparente du feuillet est nulle si, le contour étant un plan, le point considéré est situé dans ce plan.

Elle est nulle, le feuillet étant quelconque, quand elle se compose de parties de signes contraires donnant une somme algébrique nulle.

En particulier, si le feuillet forme une surface fermée, le potentiel est nul pour tout point extérieur. Pour un point intérieur au feuillet, l'angle ω est égal à 4π, le potentiel est donc constant et égal à $4\pi\Phi$; il est de même signe que la surface intérieure. Ce potentiel ayant une valeur constante tant à l'intérieur qu'à l'extérieur, l'action du feuillet fermé sur un point quelconque est nulle.

330. — Si deux feuillets magnétiques S et S′ (fig. 77) de même puissance ont le même contour et que leurs surfaces en regard soient de signes contraires, leurs potentiels sont égaux pour tous les points situés en dehors de l'espace qu'ils comprennent ; ces potentiels diffèrent, au contraire, de $4\pi\Phi$ pour tous les points situés entre les deux surfaces. En effet, le potentiel de l'un des feuillets S est positif et égal à $\Phi\omega$, celui de l'autre feuillet S′ est $-\Phi\omega'$; la différence est donc

$$\Phi(\omega+\omega')=4\pi\Phi.$$

De même, pour deux points infiniment voisins situés de part et d'autre d'un feuillet magnétique, à une distance finie du contour, la différence des potentiels est égale à $4\pi\Phi$, car elle

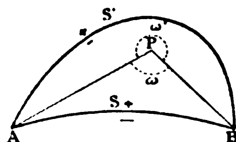


Fig. 77

est pour l'un $\Phi\omega$ et pour l'autre $-\Phi(4\pi-\omega)$. Ainsi, quand le point considéré traverse un feuillet dans le sens de l'aimantation, c'est-à-dire de la face négative à la face positive, le potentiel augmente brusquement de $4\pi\Phi$.

Si, le point restant fixe, le feuillet se déformait de manière à passer de la position S′ à la position S (fig. 77), le potentiel en P éprouverait le même accroissement de $4\pi\Phi$.

En réalité, la variation du potentiel ne se fait pas brusquement sur une surface géométrique, parce que le feuillet a nécessairement une épaisseur finie, et il est facile de voir que le potentiel en P varie d'une manière continue pendant que le point traverse la couche aimantée.

En effet, partageons le feuillet SS′ (fig. 78) en deux couches parallèles d'épaisseurs x et $h-x$ et de puissances Φ_1 et Φ_2, et considérons le point P sur la surface de séparation des deux

nouvéaux feuillets. Le potentiel en P a pour valeur

$$
\begin{aligned}
V &= \omega\Phi_2 - (4\pi - \omega)\Phi_1 \\
&= \omega(\Phi_1 + \Phi_2) - 4\pi\Phi_1 = \omega\Phi - 4\pi\Phi_1.
\end{aligned}
$$

On a d'ailleurs

$$\Phi_1 = \sigma x = \Phi\frac{x}{h},$$

et, par conséquent,

$$V = \omega\Phi - 4\pi\Phi\frac{x}{h} = \Phi\left(\omega - 4\pi\frac{x}{h}\right).$$

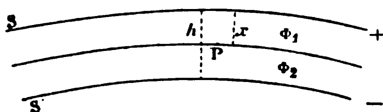


Fig. 78

L'action normale du feuillet au point P est

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\Phi\frac{\partial\omega}{\partial x} + 4\pi\Phi\frac{1}{h} = -\Phi\frac{\partial\omega}{\partial x} + 4\pi I.$$

Cette expression, comme on aurait pu le prévoir, est la composante normale de l'induction au point P. En effet, nous avons admis implicitement que nous placions le point P dans une fente infiniment mince perpendiculaire aux lignes d'aimantation : le terme $4\pi I$ est la force qu'il faut ajouter aux actions extérieures pour avoir la valeur de la force réelle à l'intérieur de la cavité.

Remarquons encore que, si l'intensité d'aimantation est finie, la puissance magnétique Φ du feuillet est une quantité infiniment petite ; pour tout point extérieur situé à une distance finie du contour du feuillet la force a donc une valeur infiniment petite, tandis que dans l'intérieur du feuillet la force a une valeur finie $4\pi I$, dirigée suivant la normale et en sens opposé à celui de l'aimantation.

331. Aimants lamellaires. — Un aimant est dit *lamellaire* quand il peut être divisé en feuillets magnétiques simples fermés ou en feuillets ouverts ayant leur contour sur la surface de l'aimant.

Désignons par Φ la somme des puissances magnétiques des feuillets que l'on rencontre en allant d'un point donné au point dont les coordonnées sont x, y, z, suivant une ligne tracée dans l'intérieur de l'aimant. Cette quantité Φ est une fonction des coordonnées, indépendante de la ligne qui joint les deux points; elle a une valeur constante sur toute la surface d'un feuillet, mais varie d'un feuillet à un autre.

Les lignes d'aimantation sont, par définition, orthogonales aux surfaces des feuillets élémentaires, et l'intensité d'aimantation est en chaque point en raison inverse de la distance normale dn de deux feuillets consécutifs. On a donc

$$I = \frac{d\Phi}{dn}. \tag{10}$$

332. Potentiel d'aimantation. — Ainsi, la fonction Φ jouit, au signe près, par rapport à l'aimantation, des mêmes propriétés que le potentiel par rapport aux forces extérieures. On peut, par analogie, appeler *potentiel d'aimantation* la fonction $-\Phi$. Les composantes de l'aimantation suivant les axes de coordonnées sont respectivement égales aux dérivées partielles correspondantes de la fonction Φ :

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

On en déduit

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = d\Phi. \tag{11}$$

Le premier membre de cette équation est donc une différentielle exacte. Inversement, si l'expression $A\,dx + B\,dy + C\,dz$ est la différentielle exacte d'une fonction des coordonnées, les composantes de l'aimantation sont égales respectivement aux dérivées partielles de cette fonction, et l'aimantation est lamellaire.

On peut exprimer la condition d'aimantation lamellaire par des équations dans lesquelles ne figure pas la fonction Φ.

On a, en effet,

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \text{ etc.};$$

ce qui donne les trois équations

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial y} - \dfrac{\partial B}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial B}{\partial z} - \dfrac{\partial C}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial C}{\partial x} - \dfrac{\partial A}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

232. — Un feuillet magnétique est dit *complexe* lorsque, l'aimantation étant toujours normale en chaque point, la puissance magnétique n'est plus constante dans toute l'étendue du feuillet.

Le potentiel au point P de l'élément dS du feuillet est encore

$$dV = \Phi d\omega = \frac{\Phi \cos\theta}{r^2} dS,$$

et le potentiel du feuillet tout entier

$$V = \int \Phi d\omega = \int \frac{\Phi \cos\theta}{r^2} dS,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface du feuillet.

Lorsqu'un aimant peut être divisé en feuillets magnétiques complexes, l'intensité d'aimantation n'est plus en raison inverse de la distance de deux feuillets infiniment voisins, mais les lignes d'aimantation sont encore orthogonales aux surfaces des feuillets, ce qui donne la condition

$$(13) \qquad \frac{A}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{B}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{C}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}}.$$

Dans ce cas, l'expression $A\,dx + B\,dy + C\,dz$ n'est plus une différentielle exacte. On peut encore éliminer la fonction Φ entre ces équations, et on obtient

$$(14)\qquad A\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) + C\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = 0.$$

Telle est la condition qui doit être satisfaite pour une aimantation lamellaire complexe.

Réciproquement, si l'équation (14) est satisfaite, l'aimant est formé de feuillets magnétiques complexes, puisque les lignes d'aimantation sont orthogonales à un système de surfaces; à moins que chacune des expressions comprises entre parenthèses ne soit nulle séparément, auquel cas l'aimantation serait lamellaire, d'après les équations (12).

334. Potentiel d'un aimant solénoïdal. — Le potentiel d'un aimant a pour valeur générale

$$V = \int \frac{\sigma}{r}\,dS + \int \frac{\rho}{r}\,dv.$$

Si l'aimant est solénoïdal, la densité ρ est nulle partout et le potentiel se réduit à

$$V = \int \frac{\sigma}{r}\,dS = \int \frac{I\cos\theta}{r}\,dS.$$

Le potentiel d'un aimant solénoïdal, en un point quelconque intérieur ou extérieur, ne dépend donc que de la densité superficielle, ou de la composante normale de l'intensité d'aimantation en chaque point de la surface. Ce potentiel est indépendant de la manière dont varie l'aimantation intérieure, ou, en d'autres termes, de la forme intérieure des filets solénoïdaux qui aboutissent à la surface, ainsi que de l'existence de filets fermés.

Pour la terre, par exemple, on peut imaginer que le magnétisme soit produit par des filets solénoïdaux, maintenus dans

les roches superficielles à basse température, et aboutissant à la surface de manière à donner une distribution équivalente à celle d'une aimantation uniforme (**320**).

335. Potentiel d'un aimant lamellaire. — Si l'aimant est lamellaire, il est composé de feuillets magnétiques fermés et de feuillets ouverts ayant leur contour sur la surface. La force extérieure dépend seulement de la forme et de la position du contour des feuillets ouverts, c'est-à-dire des zones infiniment minces interceptées sur la surface par deux feuillets voisins, et nullement de la forme des feuillets.

Pour un point intérieur, la force dans une fente comprise entre deux feuillets, ou l'induction magnétique, s'obtiendra

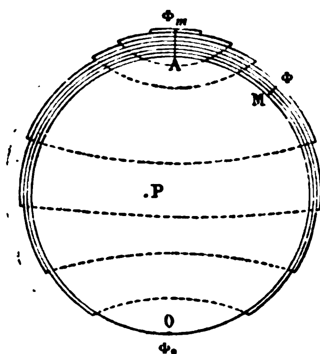


Fig. 79

en composant l'action déterminée par ces zones successives avec une force de sens inverse à l'aimantation au point considéré et égale à $4\pi I$. Les potentiels à l'aide desquels s'expriment ces forces peuvent être obtenus directement par les considérations suivantes.

Faisons d'abord abstraction des feuillets fermés et supposons qu'après avoir enlevé tous les feuillets ouverts que renferme l'aimant, on les remplace par des feuillets respectivement de même puissance, terminés aux mêmes contours, mais appliqués sur la surface elle-même : c'est l'opération qu'on pourrait réaliser physiquement si chacun des feuillets était formé d'une membrane élastique, fixée par son contour, qu'on

étendrait de manière à l'appliquer sur la surface de l'aimant, sans modifier sa puissance magnétique. Admettons, par exemple, dans la figure 79, que tous ces feuillets aient leurs faces positives tournées vers le haut, et qu'on les amène à recouvrir le point A de la surface de l'aimant où la fonction Φ a sa valeur maximum.

La surface entière sera ainsi occupée par une série de feuillets dont la superposition constitue un feuillet complexe et produit en tout point extérieur le même potentiel que l'aimant primitif.

Considérons maintenant un point P situé à l'intérieur. Pour tous les feuillets primitivement compris entre les points P et A, le potentiel n'a pas changé par le fait de la transformation ; mais pour chacun des autres feuillets qui ont été traversés par le point P, le potentiel a diminué de $4\pi d\Phi$. Soit donc $-\Phi_p$ le potentiel d'aimantation en P et $-\Phi_0$ la valeur de ce potentiel au point O de la surface où la fonction Φ est minimum ; pendant la transformation, le potentiel en P aura diminué du produit de 4π par la somme $\int d\Phi$ des puissances magnétiques de tous les feuillets situés entre les points P et O, c'est-à-dire de $4\pi(\Phi_p - \Phi_0)$, et il faudra ajouter cette quantité au nouveau potentiel du point P pour lui rendre la valeur qu'il avait primitivement.

En un point quelconque M du feuillet superficiel résultant ainsi constitué, la puissance magnétique est égale à la somme $\int d\Phi$ de celle des feuillets qu'on y a superposés ; elle est donc égale à $\Phi - \Phi_0$, en appelant $-\Phi$ la valeur en ce point du potentiel primitif d'aimantation. Par suite, le potentiel de toutes les couches sur le point P est égal à $\int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega$.

Si le point P n'est pas entouré de feuillets fermés, le potentiel en ce point a diminué de $4\pi(\Phi_p - \Phi_0)$ pendant la transformation ; la valeur primitive de ce potentiel était donc

$$(15) \qquad V_i = \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega + 4\pi(\Phi_p - \Phi_0).$$

Supposons maintenant qu'il existe des feuillets fermés; il n'y a à tenir compte que de ceux qui comprennent le point P. Soit Φ_1 la valeur de Φ sur le plus grand d'entre eux. La somme des puissances magnétiques des feuillets ouverts du point O au point P est $\Phi_1 - \Phi_0$; celle des feuillets fermés qui comprennent le point P et qui n'ont pas été déplacés par la transformation précédente est égale à $\Phi_p - \Phi_1$.

Le potentiel au point P est donc

$$V_i = \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega + 4\pi(\Phi_1 - \Phi_0) + 4\pi(\Phi_p - \Phi_1),$$

ou

$$V_i = \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega + 4\pi(\Phi_p - \Phi_0).$$

On voit que les feuillets fermés ne modifient pas l'expression du potentiel intérieur.

Le potentiel extérieur n'est pas changé par le transport des feuillets à la surface; il a pour expression

$$(16) \qquad V_e = \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega.$$

Les deux formules (15) et (16) peuvent être simplifiées, si l'on remarque que l'intégrale $\int d\omega$ est égale à zéro pour les points extérieurs et à -4π pour les points intérieurs.

Il vient alors

$$(15)' \qquad V_i = \int \Phi\, d\omega + 4\pi\Phi_p,$$

$$(16)' \qquad V_e = \int \Phi\, d\omega.$$

En désignant par Ω une fonction définie par la relation

$$(17) \qquad \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega = \Omega,$$

on pourra mettre le potentiel sous la forme

$$(15)'' \qquad V_i = \Omega + 4\pi(\Phi - \Phi_0).$$
$$(16)'' \qquad V_e = \Omega.$$

336. — Il est facile de montrer que le potentiel, malgré la différence de forme des expressions de V_e et de V_i, varie d'une manière continue quand on traverse la surface de l'aimant. En effet, considérons deux points M_e et M_i infiniment voisins, l'un extérieur et l'autre intérieur à la surface S. Quand on passe de M_e à M_i la fonction Ω diminue de

$$4\pi \int d\Phi = 4\pi(\Phi - \Phi_0).$$

On a donc, de part et d'autre de la surface,

$$(18) \qquad \Omega_e = \Omega_i + 4\pi(\Phi - \Phi_0).$$

Les potentiels magnétiques en M_e et M_i sont

$$V_e = \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega = \Omega_e,$$
$$V_i = \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega + 4\pi(\Phi - \Phi_0),$$
$$= \Omega_i + 4\pi(\Phi - \Phi_0) = \Omega_e;$$

les deux valeurs sont donc égales.

337. Potentiel d'induction. — La fonction Ω joue par rapport à l'induction F_1 le même rôle que la fonction V par rapport à la résultante magnétique F. En effet, les composantes de la force F_1 ont pour valeurs (**326**)

$$X_1 = -\frac{\partial V}{\partial x} + 4\pi A,$$
$$Y_1 = -\frac{\partial V}{\partial y} + 4\pi B,$$
$$Z_1 = -\frac{\partial V}{\partial z} + 4\pi C.$$

D'un autre côté, nous savons que l'on a (**332**)

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

De l'équation

$$V = \Omega + 4\pi(\Phi - \Phi_0)$$

on déduit

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} - 4\pi\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} - 4\pi A,$$
$$-\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y} - 4\pi\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x} - 4\pi B,$$
$$-\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} - 4\pi\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z} - 4\pi C;$$

et, par suite,

$$X_1 = -\frac{\partial \Omega}{\partial x},$$
(19) $$Y_1 = -\frac{\partial \Omega}{\partial y},$$
$$Z_1 = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Les composantes de l'induction F_1 sont donc égales et de signe contraire aux dérivées partielles de la fonction Ω.

D'autre part, les fonctions V et Ω sont identiques pour tous les points extérieurs aux milieux aimantés, points pour lesquels l'induction et la force magnétique sont elles-mêmes identiques. Par conséquent la fonction

$$\Omega = \int (\Phi - \Phi_0)\, d\omega$$

peut être considérée comme le *potentiel d'induction magnétique* d'un aimant lamellaire.

338. Énergie potentielle des aimants. — L'énergie d'un aimant permanent dans un champ magnétique produit par un système invariable a pour expression générale, en appelant

m la masse magnétique située au point où le potentiel du champ est V,

$$W = \sum mV,$$

ou encore, en fonction de la densité superficielle et de la densité cubique du magnétisme,

$$W = \int V\sigma dS + \int V\rho dv.$$

Cette énergie est le travail qu'il faudrait dépenser pour amener de l'infini dans la position qu'il occupe l'aimant considéré, ou inversement le travail qu'il pourrait produire en s'éloignant à l'infini.

Pour exprimer l'énergie en fonction de l'intensité d'aimantation, il suffirait de remplacer les densités par leurs valeurs connues; mais il est plus simple de considérer le problème directement. Un élément de volume dv, dont le moment magnétique est $I dv$, équivaut à un petit aimant de masse m, de longueur ds, parallèle à la direction d'aimantation. En appelant V et V′ le potentiel du champ aux points ou se trouvent les masses $-m$ et $+m$, l'énergie de cet élément de volume est

$$dW = m(V' - V) = m ds \frac{V' - V}{ds} = I dv \frac{\partial V}{\partial s}.$$

Si on représente par δ l'angle que fait la direction de l'aimantation avec la direction du champ et par dn la distance normale au point considéré des deux surfaces de niveau V et V′, on a

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{dV}{dn} \cos\delta = -F\cos\delta = -(X\lambda + Y\mu + Z\nu),$$

X, Y et Z étant les composantes de la force du champ, λ, μ et ν

les cosinus des angles de l'aimantation avec les axes. L'énergie élémentaire a donc pour expression

$$dW = -(XI\lambda + YI\mu + ZI\nu)\,dv = -(AX + BY + CZ)\,dv,$$

et, par suite, l'énergie de l'aimant total est

$$(20) \qquad W = -\int (AX + BY + CZ)\,dv.$$

Si le champ est uniforme, les composantes X, Y et Z sont constantes. En appelant α, β et γ les cosinus des angles de la force F avec les axes, il vient

$$W = -F\left[\alpha\int A\,dv + \beta\int B\,dv + \gamma\int C\,dv\right].$$

Si on désigne par K le moment magnétique de l'aimant, par l, m et n les cosinus des angles que fait l'axe magnétique avec les axes de coordonnées, on a

$$\int A\,dv = Kl, \qquad \int B\,dv = Km, \qquad \int C\,dv = Kn,$$

et l'énergie devient

$$(21) \qquad W = -FK(\alpha l + \beta m + \gamma n) = -FK\cos\delta,$$

δ étant l'angle de l'axe magnétique avec la direction du champ. Ce résultat pouvait être écrit directement.

L'énergie est minimum et égale à $-$FK et, par suite, l'équilibre stable quand l'angle δ est nul, c'est-à-dire quand l'axe magnétique est parallèle à la direction du champ. Il y a équilibre instable si ces deux directions sont opposées; l'énergie est alors maximum et égale à FK. Enfin l'énergie est nulle quand les deux directions sont rectangulaires.

339. Energie d'un feuillet magnétique. — Si le système est un feuillet magnétique simple S, le moment magnétique d'un

élément de surface du feuillet est ΦdS et son énergie potentielle dans le champ a pour valeur

$$dW = -\Phi(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\,dS;$$

l'énergie du feuillet est donc

$$W = -\Phi \int (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\,dS.$$

La parenthèse $X\alpha + Y\beta + Z\gamma$ représente la projection F_n de la force du champ sur la normale au feuillet ; le produit $F_n dS$ est le flux de force du champ correspondant à l'élément dS ; ce flux est compté positivement quand il traverse le feuillet de la face négative à la face positive, et négativement en sens contraire. On voit donc que l'intégrale du second membre exprime simplement la valeur du flux limité au contour et, par suite, qu'elle est indépendante de la forme de la surface qui s'y rattache. Soit Q la valeur de ce flux, l'énergie potentielle du feuillet a pour expression

$$W = -\Phi Q. \tag{22}$$

Par suite, *l'énergie potentielle d'un feuillet est égale au produit, pris en signe contraire, de la puissance du feuillet par le flux de force qui pénètre par sa face négative.*

220. — Ce résultat peut être obtenu directement. En effet, l'énergie d'une masse m dans le champ d'un feuillet magnétique simple a pour expression

$$dW = mV = m\Phi\omega = \Phi m\omega.$$

Or, le produit $m\omega$ est le flux de force qui émane du point dans l'angle ω et qui, par conséquent, traverse le feuillet en entrant par la surface positive. Le flux dQ qui entre par la surface négative a la même valeur prise en signe contraire, c'est-à-dire $-m\omega$. On a donc

$$dW = -\Phi dQ.$$

Or l'énergie d'un système magnétique dans le champ du feuillet est la somme des énergies des différentes masses; c'est donc le produit, pris en signe contraire, de la puissance magnétique Φ du feuillet par la somme des flux de force qui le traversent, c'est-à-dire par le flux de force qui émane du système et entre dans le feuillet par la face négative.

341. — Si ce système est un second feuillet S′, le flux de force Q est proportionnel à la puissance magnétique Φ' de ce second feuillet et on peut écrire $Q = M\Phi'$, le coefficient M étant le flux de force que recevrait le premier feuillet, si la puissance du second était égale à l'unité. L'énergie du premier feuillet dans le champ du second est donc

$$W = -\Phi\Phi' M. \tag{23}$$

L'énergie du second feuillet dans le champ du premier a la même valeur et s'exprimera de la même manière,

$$W = -\Phi'\Phi M',$$

en fonction du flux de force qui émanant du premier traverserait le second; on en conclut

$$M = M'. \tag{24}$$

Ainsi *quand deux feuillets magnétiques de puissances égales à l'unité sont en présence, le flux de force qui émane de l'un pour traverser l'autre en entrant par la face négative est le même pour les deux.*

On remarquera l'analogie de cette propriété avec le théorème démontré plus haut (**62**) et relatif à l'induction électrostatique entre deux conducteurs.

342. — L'équation (22) montre que l'énergie d'un feuillet dans un champ magnétique ne dépend que du flux de force qui traverse la surface limitée par le contour du feuillet et qu'il est indépendant de la forme de cette surface. Cette énergie et, par suite, la force qui s'exerce sur le feuillet, peuvent donc être exprimées en fonction de la courbe du contour.

De même l'énergie réciproque de deux feuilletsdonnée par l'équation (23) ne dépend que des deux contours ; cette éner-

gie et la force réciproque doivent aussi pouvoir s'exprimer en fonction des deux courbes qui limitent les feuillets.

343. Action d'un champ sur un feuillet. — Considérons un feuillet S (fig. 80) situé dans un champ magnétique quelcon-

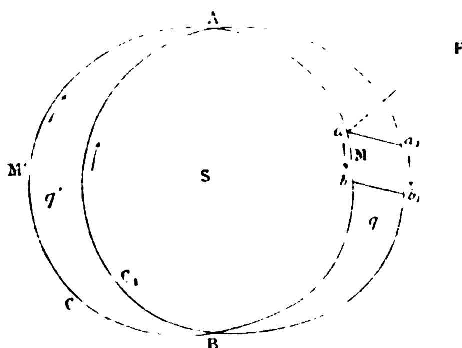


Fig. 80

que. Lorsque ce feuillet éprouve un déplacement infiniment petit, l'accroissement d'énergie potentielle est

$$dW = -\Phi dQ,$$

dQ étant l'accroissement du flux de force qui traverse le feuillet par la face négative. Le travail dT des forces magnétiques étant égal et de signe contraire à dW, on a

$$dT = \Phi dQ.$$

Comme la forme du feuillet est indifférente, nous pouvons supposer qu'il fait partie d'une surface continue S, passant par les positions C et C_1 qu'occupe successivement le contour, et que celui-ci ne fait que glisser sur la surface.

Le travail des forces magnétiques est proportionnel à l'excès du flux de force qui traverse la surface limitée par le contour C_1 sur celui qui traverse la surface limitée par le contour C. Le flux de force relatif à la portion commune aux deux feuillets disparaît par différence, de sorte qu'en appelant q et q' les flux qui traversent les fuseaux AMB et AM'B, on a

$$dT = \Phi(q - q').$$

Soit ab un élément du premier contour, a_1b_1 sa nouvelle position après le déplacement, F la force du champ en ce point. Pour obtenir la partie dq du flux relative au déplacement, on fera le produit de la force F par la projection sur un

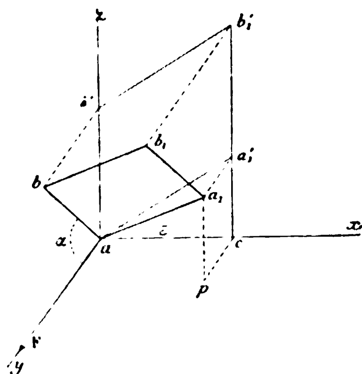


Fig. 81

plan perpendiculaire à cette force du parallélogramme abb_1a_1 qu'a décrit l'élément.

Afin de mieux voir la signification géométrique de ce produit, imaginons un observateur couché le long de la courbe C de manière qu'en regardant le feuillet il ait à sa droite la face négative. Le sens positif des arcs est celui d'un mobile qui irait des pieds à la tête de l'observateur. Prenons pour plan des yz le plan Fds, et la direction de la force F comme axe des y (fig. 81). Soit α l'angle de l'élément ds, compté dans le sens positif, avec la force F. La projection du parallélogramme abb_1a_1 sur le plan des xz normal à la force F est un nouveau parallélogramme $ab'b'_1a'_1$. On peut considérer ce dernier comme ayant pour base $ab' = ds \sin\alpha$ et pour hauteur ac, c'est-à-dire l'abscisse du point a_1, ou la projection ε du déplacement aa_1 sur l'axe ax normal au plan Fds. On a donc

$$(25) \qquad dq = \mathrm{F}ds \sin\alpha \times \varepsilon.$$

Le travail correspondant est

$$\Phi dq = \Phi \mathrm{F} ds \sin\alpha \times \varepsilon.$$

Ce travail est le même que si l'élément ds était soumis à l'action d'une force

$$d\varphi = \Phi F ds \sin\alpha$$

parallèle à l'axe des x, c'est-à-dire normale au plan Fds. On est ainsi conduit à ce théorème important :

L'action d'un champ magnétique sur un feuillet est équivalente à celle d'un système de forces appliquées aux différents éléments du contour.

La force qu'il faut supposer appliquée à chaque élément est normale au plan qui passe par l'élément et la direction du champ et dirigée vers la gauche d'un observateur placé dans l'élément suivant la direction positive et regardant la direction de la force F.

344. — Si l'on considère ces actions comme réelles, on peut énoncer le théorème suivant :

L'action d'un champ magnétique sur un élément de contour d'un feuillet est égale au produit de la puissance magnétique du feuillet par la force du champ, la longueur de l'élément et le sinus de l'angle compris, en d'autres termes, par la surface $dA = F ds \sin\alpha$ *du parallélogramme construit sur la force* F *et l'élément* ds.

On a donc simplement

$$d\varphi = \Phi dA, \qquad dq = \Phi \varepsilon dA.$$

En particulier, si le système magnétique se réduit à une masse unique m à une distance r de l'élément ds, la force F est égale à $\frac{m}{r^2}$ et l'action élémentaire devient :

$$d\varphi = \Phi \frac{m}{r^2} ds \sin\alpha.$$

Donc, l'*action d'un pôle magnétique sur un élément de contour d'un feuillet est en raison inverse du carré de la distance et proportionnelle au sinus de l'angle que fait l'élément avec la droite qui joint le pôle à l'élément.*

345. — Remarquons encore que dq représente le flux de force coupé par l'élément ds pendant le déplacement aa_1, ce flux de force coupé étant compté comme positif ou négatif suivant que le déplacement s'effectue à gauche ou à droite de l'observateur dont la position a été définie plus haut. Il en résulte ce théorème :

Le travail des forces magnétiques pendant le déplacement est égal au produit de la puissance du feuillet par la somme des flux de force coupés par chacun des éléments du contour.

346. — Supposons que le système extérieur se réduise à une masse magnétique égale à l'unité et placée à l'origine O des coordonnées. Soit C le contour du feuillet et ds un élément situé à la distance r, en un point M dont les coordonnées sont x, y et z.

Appelons λ, μ et ν les cosinus des angles que fait avec les axes la force $d\varphi$. Cette force étant perpendiculaire à l'élément ds et à la droite OM suivant laquelle est dirigée l'action $\frac{1}{r^2}$ émanant du point O, on a les relations

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0,$$
$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0\,;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\lambda}{y\,dz - z\,dy} = \frac{\mu}{z\,dx - x\,dz} = \frac{\nu}{x\,dy - y\,dx} = \frac{1}{r\,ds \sin\alpha},$$

α désignant l'angle que fait la droite OM avec l'élément ds.

Comme la force $d\varphi$ est égale à $\frac{\Phi}{r^2} ds \sin\alpha$, ses composantes $d\xi$, $d\eta$ et $d\zeta$ sont

$$d\xi = \lambda d\varphi = \frac{\Phi}{r^3}(y\,dz - z\,dy),$$

$$d\eta = \mu d\varphi = \frac{\Phi}{r^3}(z\,dx - x\,dz),$$

$$d\zeta = \nu d\varphi = \frac{\Phi}{r^3}(x\,dy - y\,dx).$$

L'action du point O sur le feuillet s'obtiendra en étendant

ces expressions au contour total. Enfin, l'action F du feuillet sur le point O passe par ce point et les composantes X, Y, Z de cette force sont égales et de signes contraires à celles de l'action du point sur le feuillet; on a donc

$$(26)\qquad \begin{aligned} X &= \Phi\int\frac{z\,dy - y\,dz}{r^3} = \Phi\int\frac{z^2}{r^3}d\left(\frac{y}{z}\right),\\ Y &= \Phi\int\frac{x\,dz - z\,dx}{r^3} = \Phi\int\frac{x^2}{r^3}d\left(\frac{z}{x}\right),\\ Z &= \Phi\int\frac{y\,dx - x\,dy}{r^3} = \Phi\int\frac{y^2}{r^3}d\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

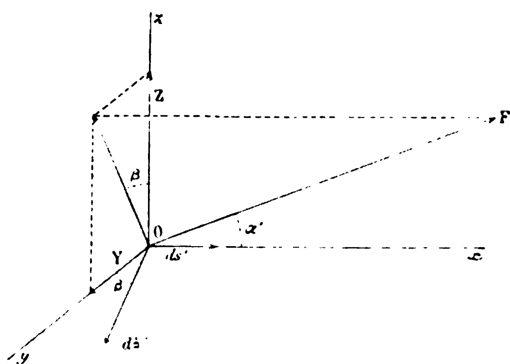


Fig. 82

317. Action réciproque de deux feuillets. — Nous pouvons déterminer maintenant l'action réciproque de deux feuillets S et S'. L'action de S sur S' peut être considérée comme la résultante des actions, déterminées par la règle précédente, qu'exercerait le feuillet S sur chacun des éléments ds' du contour C' du second feuillet.

Supposons que l'un de ces éléments ds' soit situé en O (fig. 82) et dirigé suivant l'axe des x. L'action $d\varphi'$ qui s'exerce sur cet élément est égale à $\Phi'F ds' \sin\alpha'$ et située dans le plan des zy; les composantes de cette force sont

$$\begin{aligned} d\xi' &= 0,\\ d\eta' &= \Phi'F ds' \sin\alpha' . \cos\beta = \Phi' Z ds',\\ d\zeta' &= -\Phi'F ds' \sin\alpha' . \sin\beta = -\Phi' Y ds'; \end{aligned}$$

ce qui donne, en exprimant les forces Z et Y en fonction des coordonnées x, y et z du point M où se trouve l'élément ds,

$$(27)\qquad \begin{aligned} d\xi' &= 0, \\ d\eta' &= \Phi\Phi' ds' \int \frac{y\,dx - x\,dy}{r^3}, \\ d\zeta' &= \Phi\Phi' ds' \int \frac{z\,dx - x\,dz}{r^3}. \end{aligned}$$

On peut encore considérer l'action du contour C sur l'élément ds' comme la résultante d'actions directes qu'exerceraient sur l'élément ds' chacun des éléments ds. La seule condition imposée à cette action élémentaire est que l'intégrale des composantes partielles étendue au contour C reproduise les expressions qui précèdent.

318. — D'après cela, la solution la plus simple pour l'action de ds sur ds' est une force f dont les composantes parallèles aux axes f_x, f_y, f_z soient, en représentant par a le produit $\Phi\Phi' ds'$,

$$(28)\qquad \begin{aligned} f_x &= 0, \\ f_y &= -a\,\frac{x\,dy - y\,dx}{r^3} = -a\,\frac{x^2}{r^3}\,d\left(\frac{y}{x}\right), \\ f_z &= -a\,\frac{x\,dz - z\,dx}{r^3} = -a\,\frac{x^2}{r^3}\,d\left(\frac{z}{x}\right). \end{aligned}$$

319. — Il est permis d'ajouter à chacune des composantes de l'action élémentaire une différentielle exacte des coordonnées x, y et z, puisque les intégrales étendues au contour C donneront pour ces termes des valeurs nulles. Il y a donc une infinité d'expressions par lesquelles on peut traduire l'action des éléments de deux feuillets magnétiques.

Soient aX, aY et aZ des fonctions des coordonnées x, y, z; on satisfera au problème en prenant pour composantes de l'action

$$(29)\qquad \begin{aligned} f_x &= a\,dX, \\ f_y &= a\left[dY - \frac{x^2}{r^3}\,d\left(\frac{y}{x}\right)\right], \\ f_z &= a\left[dZ - \frac{x^2}{r^3}\,d\left(\frac{z}{x}\right)\right]. \end{aligned}$$

350. — Imposons, par exemple, à cette force la condition qu'elle soit dirigée suivant la droite qui joint les éléments, de sorte qu'on ait

$$\frac{f_x}{x} = \frac{f_y}{y} = \frac{f_z}{z} = \frac{f}{r};$$

il en résulte

$$dY - \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} dX,$$

ou

$$dY = \frac{y}{x} dX + \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$dZ = \frac{z}{x} dX + \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right).$$

Pour que les seconds membres de ces deux dernières équations soient des différentielles exactes d'une fonction des coordonnées, il faut qu'on ait

$$dX = d\left(\frac{x^2}{r^3}\right),$$

et, par suite,

$$dY = d\left(\frac{y}{x} \cdot \frac{x^2}{r^3}\right) = d\left(\frac{xy}{r^3}\right),$$

$$dZ = d\left(\frac{z}{x} \cdot \frac{x^2}{r^3}\right) = d\left(\frac{xz}{r^3}\right).$$

Les composantes de la force élémentaire seront alors

$$f_x = a d\left(\frac{x^2}{r^3}\right),$$

(30)
$$f_y = a\left[d\left(\frac{xy}{r^3}\right) - \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

$$f_z = a\left[d\left(\frac{xz}{r^3}\right) - \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right)\right].$$

La force elle-même peut être déterminée par la relation

$$f = \frac{r}{x} f_x,$$

qui donne

$$f = a\frac{r}{x}d\left(\frac{x^2}{r^3}\right) = \frac{2a}{r^2}\left[dx - \frac{3}{2}\frac{x}{r}dr\right] = \frac{2a}{r^2}\left[\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{3}{2}\frac{x}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\right]ds.$$

Si on appelle θ et θ' les angles que font respectivement les éléments ds et ds' avec la droite OM qui les joint et ε l'angle de ces deux éléments, on a

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\varepsilon,$$

$$\frac{x}{r} = \cos\theta',$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \cos\theta,$$

et il vient

$$f = \frac{2a}{r^2}\left[\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right]ds.$$

Si on compte l'action de ds sur ds' et la distance r suivant la direction MO, il faudra changer le signe de la force et remplacer les angles θ et θ' par $\pi-\theta$ et $\pi-\theta'$, ce qui ne change pas le signe du produit des cosinus.

Représentons par $d^2\psi$ l'action de ds sur ds', qui est un infiniment petit du second ordre, et considérons cette force comme répulsive ; on aura finalement

$$(31)\qquad d^2\psi = -\frac{2\Phi\Phi' ds ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right).$$

351. — On peut donner à cette expression une autre forme plus commode pour évaluer le travail.

Soient C et C' (fig. 83) les contours de deux feuillets, ds et ds' les éléments en P et P', et comptons respectivement les arcs s et s' à partir de points fixes O et O'.

On a, d'après la figure,

$$\cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s},$$

$$\cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Abaissant des extrémités P′ et P″ de l'élément ds' des perpendiculaires P′A et P″A′ sur la tangente à la courbe C au point P, il vient

$$\mathrm{PA} = r\cos\theta,$$
$$\mathrm{PA}' = r\cos\theta + \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial s'}ds',$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{AA}' = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial s'}ds'.$$

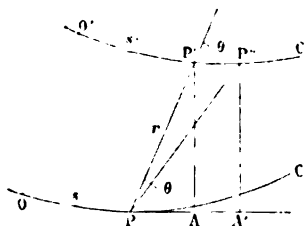


Fig. 83

D'autre part, la distance AA′ est la projection de l'élément ds' sur la tangente en P à la courbe s, ce qui donne

$$\mathrm{AA}' = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial s'}ds' = ds'\cos\varepsilon,$$

et, par suite,

$$\cos\varepsilon = \frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial s'} = -\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'} = -\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}.$$

L'action élémentaire peut donc s'écrire

$$d^2\psi = \frac{2\Phi\Phi' ds ds'}{r^2}\left[\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{3}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right]$$
$$= \frac{2\Phi\Phi' ds ds'}{r^2}\left[r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right].$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}=\frac{1}{2\sqrt{r}}\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}-\frac{1}{4r\sqrt{r}}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}=\frac{1}{2r\sqrt{r}}\left[r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}-\frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\right]$$

ce qui donne finalement

$$d^2\psi=\frac{4\Phi\Phi' ds ds'}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}. \tag{32}$$

352. — Pour évaluer l'énergie relative du système, supposons que le feuillet S' s'éloigne et que pendant le temps dt la distance r de deux éléments varie de $\frac{\partial r}{\partial t}dt$ ou $2\sqrt{r}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}dt$. Le travail élémentaire correspondant de la force $d^2\psi$ est égal à $d^2\psi\frac{dr}{dt}dt$, de sorte que le travail total d^2T relatif à l'élément ds pour le temps dt est

$$d^2\mathrm{T}=8\Phi\Phi' dt ds\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}ds'.$$

En intégrant par parties, on a

$$\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s\partial s'}ds'=\left[\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right]-\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'\partial t}ds'.$$

Le premier terme du second membre est nul pour le contour fermé C', ce qui donne

$$d^2\mathrm{T}=-8\Phi\Phi' dt ds\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'\partial t}ds'.$$

Le travail élémentaire relatif aux actions des deux circuits pendant le temps dt est donc

$$d\mathrm{T}=-8\Phi\Phi' dt\int\int\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s'\partial t}ds' ds.$$

Ce travail devant être symétrique par rapport aux contours C et C', on a aussi

$$dT = -8\Phi\Phi' dt \int\int \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'} \cdot \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s \partial t} ds ds'.$$

Il en résulte, en prenant la demi-somme de ces expressions,

$$dT = -4\Phi\Phi' dt \int\int \left[\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s' \partial t} + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s \partial t}\right] ds ds'$$

$$= -4\Phi\Phi' dt \int\int \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'}\right] ds ds',$$

ou

$$dT = -4\Phi\Phi' d \int\int \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'} ds ds'.$$

L'énergie potentielle relative W des deux feuillets est égale au travail que peuvent accomplir les forces lorsque l'un des feuillets C' s'éloigne à l'infini. On a donc

$$W = -4\Phi\Phi' \int\int \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'} ds ds'. \tag{33}$$

353. — Cette expression de l'énergie peut être mise sous plusieurs formes différentes.

On a, en effet,

$$\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s'} = \frac{1}{4r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} = -\frac{1}{4r}\cos\theta\cos\theta' = -\frac{r}{4}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}.$$

On peut donc écrire

$$W = \Phi\Phi' \int\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r} ds ds' = \Phi\Phi' \int\int r \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} ds ds'$$

$$= \Phi\Phi' \int ds \int r \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} ds'.$$

En intégrant par parties la dernière expression, on a

$$\int r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}ds' = \left[\frac{\partial r}{\partial s}\right] - \int\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}ds'.$$

Le premier terme du second membre devant être étendu au contour fermé C′ est nul; il reste donc

$$\int r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}ds' = -\int\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)}{\partial s'}ds' = \int\frac{\cos\varepsilon}{r}ds',$$

et, par suite,

(34) $$W = \Phi\Phi'\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}ds\,ds'.$$

Cette formule remarquable est due a F.-E. Neumann. On en déduit, pour la valeur du coefficient M (341) qui exprime le flux de force commun aux deux feuillets supposés d'intensité égale à l'unité,

(35) $$M = -\int\int\frac{\cos\varepsilon}{r}ds\,ds'.$$

CHAPITRE TROISIÈME

CAS PARTICULIERS

354. Potentiel d'un aimant uniforme. — L'action magnétique d'un corps aimanté uniformément étant équivalente à celle de deux couches de glissement (**320**), le potentiel V peut se déduire facilement de celui d'une masse homogène qui remplirait tout le volume. Soit P la valeur de ce potentiel en un point M quand la densité de la masse est égale à l'unité, sa valeur sera ρP si la densité est ρ.

Le potentiel du système des deux couches est évidemment la somme du potentiel ρP de la masse positive et du potentiel $-\rho P'$ d'une masse négative identique qui aurait glissé en sens inverse de l'aimantation d'une quantité infiniment petite $dx = \delta$. Ce potentiel $\rho P'$ est celui de la masse positive au point M′, dont les coordonnées sont les mêmes que celles du point M, sauf l'abscisse parallèle à l'aimantation qui a augmenté de dx.

On obtient ainsi

$$(1) \qquad V = \rho P - \rho\left(P + \frac{\partial P}{\partial x}dx\right) = -\rho\delta\frac{\partial P}{\partial x} = -I\frac{\partial P}{\partial x}.$$

Par suite, le potentiel d'un aimant uniforme est égal et de signe contraire au produit de l'intensité d'aimantation par la dérivée partielle, par rapport à la direction de l'aimantation, du potentiel qu'aurait au point considéré une masse uniforme de densité égale à l'unité occupant le volume total du corps.

Les composantes X, Y et Z de la force magnétique sont

égales et de signe contraire aux dérivées partielles du potentiel, ce qui donne

$$(2)\qquad X = I\frac{\partial^2 P}{\partial x^2},\qquad Y = I\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y},\qquad Z = I\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}.$$

355. Sphère. — Pour une sphère de volume u, par exemple, la valeur de P, en un point extérieur à la distance r du centre, est

$$P = \frac{u}{r};$$

il en résulte

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{u}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{ux}{r^3},$$

et, par suite,

$$V = Iu\frac{x}{r^3},$$

comme on l'a vu précédemment (**157**).

Dans l'intérieur de la sphère, l'action d'une masse de densité égale à l'unité serait (**44**) égale à $\frac{4}{3}\pi r$, ce qui donne pour le potentiel, en appelant a le rayon la sphère,

$$P = \frac{2}{3}\pi(3a^2 - r^2).$$

Il en résulte

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi x,$$

et, par suite,

$$X = -\frac{4}{3}\pi I,\qquad Y = 0,\qquad Z = 0;$$

c'est-à-dire que l'action intérieure d'une sphère aimantée uniformément est constante, parallèle et de sens contraire à la direction de l'aimantation, résultat qui a déjà été établi directement (**157**).

L'induction magnétique dans l'intérieur de la sphère est

constante et égale (324) à

$$-\frac{4}{3}\pi I + 4\pi I = \frac{8}{3}\pi I,$$

de sorte que le flux total d'induction qui traverse le grand cercle perpendiculaire à l'aimantation a pour expression

$$\frac{8}{3}\pi I . \pi a^2 = \frac{2}{3}(2\pi a)^2 I.$$

356. Ellipsoïde. — Considérons un ellipsoïde homogène dont les axes $2a$, $2b$ et $2c$ sont pris comme axes de coordonnées. En désignant par L, M, N des fonctions connues des axes, le potentiel de cet ellipsoïde en un point de l'intérieur, dont les coordonnés sont x, y et z, est

$$P = -\frac{1}{2}(Lx^2 + My^2 + Nz^2) + \text{const.}$$

Si l'ellipsoïde est aimanté uniformément dans une direction qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont l, m, n, les composantes de l'aimantation sont

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} = I,$$

et l'état de l'ellipsoïde peut être considéré comme produit par la superposition de ces trois aimantations A, B et C, respectivement parallèles aux axes. Le potentiel à l'intérieur est

$$V = -\left(A\frac{\partial P}{\partial x} + B\frac{\partial P}{\partial y} + C\frac{\partial P}{\partial z}\right) = -I(Llx + Mmy + Nnz),$$

et les composantes de la force parallèlement aux axes ont pour valeurs

$$X = -AL, \quad Y = -BM, \quad Z = -CN.$$

La force magnétique intérieure d'un ellipsoïde aimanté uniformément est donc constante en grandeur et en direction, et fait avec les axes des angles dont les cosinus sont respectivement proportionnels à AL, BM et CN.

Les composantes de l'induction parallèles aux axes sont

$$X_1 = (4\pi - L) A,$$
$$Y_1 = (4\pi - M) B,$$
$$Z_1 = (4\pi - N) C.$$

L'induction est donc aussi une force constante, qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels respectivement à $(4\pi - L) A$, $(4\pi - M) B$ et $(4\pi - N) C$.

Enfin, les flux d'induction qui traversent les trois sections principales ont respectivement pour valeurs $\pi bc (4\pi - L) A$, $\pi ca (4\pi - M) B$ et $\pi ab (4\pi - N) C$.

357. — Si l'aimantation est parallèle à l'un des axes, à l'axe a par exemple, on a simplement

$$F = -IL.$$

La quantité de magnétisme M_a distribuée sur chacune des moitiés de l'ellipsoïde est égale, d'après le mode de formation de la couche, à la charge totale qui existerait sur la section principale parallèle aux deux autres axes, si la densité y était uniforme et égale à I ; on a donc

$$M_a = \pi bc I = -\pi bc \frac{F}{L}.$$

Le moment magnétique ϖ_a de l'aimant ainsi constitué est égal au produit du volume par l'intensité, ce qui donne

$$\varpi_a = \frac{4}{3} \pi abc I = -\frac{4}{3} \pi abc \frac{F}{L}.$$

Les pôles de l'aimant, ou les centres de gravité de chacune des deux couches, sont situés à une distance a' du centre déterminée par l'équation

$$\varpi_a = 2a' M_a,$$

qui donne

$$a' = \frac{1}{2}\frac{\varpi_a}{M_a} = \frac{2}{3}a.$$

Ainsi le pôle d'un ellipsoïde aimanté uniformément dans une direction parallèle à l'un des axes est à une distance du centre égale aux $\frac{2}{3}$ de la longueur du demi-axe correspondant.

La densité en un point de la surface est donnée par l'équation

$$\sigma = I\cos\theta = I\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} = I\frac{px}{a^2},$$

p étant la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent au point dont les coordonnées sont x, y et z.

La charge totale d'une zone, déterminée par deux plans perpendiculaires à l'axe a et distants de dx, est égale au produit de l'intensité I par la différence dS des sections de l'ellipsoïde correspondant à ces deux plans. A la distance x la section est limitée par l'ellipse

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

dont la surface est

$$S = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right);$$

on a donc

$$dS = -\frac{2\pi bc}{a^2}x\,dx,$$

et, par suite, la charge de la zone est

$$dM_a = -\frac{2\pi bcI}{a^2}x\,dx.$$

Le rapport $\frac{dM_a}{dx}$ de la charge de la zone à sa hauteur, qu'on

peut appeler la densité linéaire rapportée à l'axe d'aimantation, est donc proportionnelle à la distance de cette zone au centre de l'ellipsoïde.

358. — Lorsque les axes de l'ellipsoïde sont inégaux, les coefficients L, M et N sont donnés par les dérivées partielles d'une intégrale elliptique définie; nous renverrons pour le calcul complet aux traités spéciaux, nous bornant à indiquer les résultats relatifs aux ellipsoïdes de révolution. Dans ce cas, en effet, le problème est plus simple et les coefficients s'expriment à l'aide des fonctions ordinaires.

Si l'ellipsoïde est de révolution autour du petit axe c, on a, en appelant e l'excentricité de l'ellipse méridienne,

$$a = b = \frac{c}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$L = M = 2\pi \left[\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3 \sin e} - \frac{1-e^2}{e^2} \right],$$

$$N = 4\pi \left[\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3 \sin e} \right].$$

Pour un ellipsoïde de révolution autour du grand axe,

$$b = c = a\sqrt{1-e^2},$$

$$L = 4\pi . \frac{1-e^2}{e^2} \left[\frac{1}{2e} l. \frac{1+e}{1-e} - 1 \right],$$

$$M = N = 2\pi \left[\frac{1}{e^2} - \frac{1-e^2}{2e^3} l. \frac{1+e}{1-e} \right].$$

En faisant $e=0$ dans ces formules, on retrouve les résultats déjà obtenus directement pour la sphère, c'est-à-dire :

$$L = M = N = \frac{4}{3}\pi,$$

$$F = -\frac{4}{3}\pi I.$$

Pour un ellipsoïde très aplati, dans lequel l'excentricité e

est voisine de l'unité, on a, à la limite,

$$L=M=\pi^2\frac{c}{a}=\pi^2\sqrt{1-e^2},$$

$$N=4\pi.$$

Enfin, si l'ellipsoïde est très allongé, on a d'une manière approximative

$$M=N=2\pi,$$

$$L=4\pi\frac{b^2}{a^2}\left(l.\frac{2a}{b}-1\right),$$

et le coefficient L tend vers zéro quand l'excentricité e tend vers l'unité.

En résumé, pour un ellipsoïde très aplati, que l'on pourra à la limite confondre avec un disque très mince, la force intérieure est donnée par les équations

$$F=-4\pi I, \quad \text{ou} \quad F=-\pi^2\sqrt{1-e^2}\,I,$$

suivant que l'aimantation est perpendiculaire ou parallèle au plan du disque.

Pour un ellipsoïde très allongé, on aura de même

$$F=-2\pi I, \quad \text{ou} \quad F=-4\pi^2\frac{b^2}{a^2}\left(l.\frac{2a}{b}-1\right)I,$$

suivant que l'aimantation sera perpendiculaire ou parallèle au grand axe.

359. Cylindre aimanté transversalement. — Le cas d'un cylindre se déduirait de celui d'un ellipsoïde, mais il est facile de le traiter directement. Si l'on considère un cylindre circulaire indéfini de rayon a et de densité égale à l'unité, la masse de l'unité de longueur est $\lambda=\pi a^2$.

L'action extérieure de ce cylindre à la distance r de l'axe est égale (**132**) à $\frac{2\lambda}{r}=\frac{2\pi a^2}{r}$, ce qui donne pour le potentiel

$$P=-2\pi a^2 l.r+\text{const.}$$

Si le cylindre a une aimantation transversale uniforme et qu'on prenne l'axe de x parallèle à l'aimantation, le potentiel extérieur sera donc

$$V = -I\frac{\partial P}{\partial x} = I\frac{2\pi a^2}{r}\frac{\partial r}{\partial x} = I\frac{2\pi a^2}{r^2}x.$$

Sur un point intérieur, l'action d'un cylindre circulaire homogène se réduit à celle du noyau cylindrique qui passe par le point. On le verrait aisément par un raisonnement analogue a celui qui a été fait pour la sphère (42). L'action du cylindre sur un point intérieur est donc égale à $\frac{2\pi r^2}{r} = 2\pi r$, et le potentiel devient

$$P = -\pi r^2 + \text{const.}$$

Le potentiel du cylindre aimanté uniformément est donc

$$V = -I\frac{\partial P}{\partial x} = I 2\pi r\frac{\partial r}{\partial x} = I 2\pi x.$$

Par suite, la force intérieure est constante et égale à $-2\pi I$; sa direction est opposée à celle de l'aimantation.

L'induction est aussi constante et a pour valeur

$$F_1 = 4\pi I - 2\pi I = 2\pi I.$$

360. Potentiel des feuillets magnétiques. — Nous avons vu que le potentiel d'un feuillet uniforme est égal au produit de sa puissance magnétique Φ par sa surface apparente ω au point considéré. Si le feuillet n'est pas uniforme, le potentiel a pour expression

$$V = \int \Phi d\omega.$$

Le calcul du potentiel peut être ramené, par une méthode analogue à la précédente, au potentiel d'une couche magnétique, de manière à éviter l'évaluation des angles solides.

Le potentiel en un point M d'un élément de feuillet dS est égal à celui de deux couches magnétiques $\pm\sigma dS$, égales et de signes contraires, dont la distance normale dn satisfait à la condition $\sigma dn = \Phi$.

Désignons par n la distance de l'élément à un point fixe situé sur la normale du côté de la face négative, le potentiel fdS de la couche σdS peut être considéré comme une fonction de cette distance n, de sorte que le potentiel de l'élément du feuillet sera

$$dSf(n) - dSf(n - dn) = dS\,dn\,\frac{\partial f}{\partial n}.$$

Comme la distance dn des deux surfaces peut être supposée constante, le potentiel du feuillet total est

$$V = \int dS dn\,\frac{\partial f}{\partial n} = dn\int dS\,\frac{\partial f}{\partial n}.$$

Or, l'expression $\int fdS$ représente le potentiel U de la surface positive du feuillet; on a donc

$$V = dn\,\frac{\partial U}{\partial n}. \tag{3}$$

Le potentiel Q d'une couche dont la densité en chaque point serait égale à la puissance magnétique Φ a pour valeur $U\dfrac{\Phi}{\sigma}$ ou $U dn$; il en résulte

$$V = \frac{\partial Q}{\partial n}. \tag{4}$$

En appelant $\dfrac{1}{p}$ la distance du point M à l'élément dS, le potentiel Q est égal à $\int p\Phi dS$, ce qui donne encore

$$V = \int \Phi\,\frac{\partial p}{\partial n}\,dS. \tag{5}$$

Le facteur p représente le potentiel sur l'élément dS d'une masse égale à l'unité située au point M.

361. — Si le feuillet est uniforme, le facteur Φ est une constante. En appelant P le potentiel d'une couche de densité égale à l'unité, on aura $Q=\Phi P$, et les expressions (4) et (5) deviennent

$$V=\Phi\frac{\partial P}{\partial n}, \tag{6}$$

$$V=\Phi\int\frac{\partial p}{\partial n}dS. \tag{6'}$$

362. — Considérons, par exemple, un feuillet limité par un contour plan; on peut le remplacer par un feuillet plan de même puissance limité au même contour. Plaçons ce feuillet dans le plan des yz, la face positive du côté de l'axe des x. L'abscisse du point M étant x, on a évidemment $dx=-dn$ et, par suite,

$$\frac{\partial Q}{\partial n}=-\frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$V=-\frac{\partial Q}{\partial x}=-\int\Phi\frac{\partial p}{\partial x}dS. \tag{7}$$

Si le feuillet est uniforme, il vient

$$V=-\Phi\frac{\partial P}{\partial x}=-\Phi\int\frac{\partial p}{\partial x}dS, \tag{7'}$$

expression que l'on aurait pu obtenir par la considération des couches de glissement (**354**).

363. — Pour un feuillet situé sur une sphère de rayon a, le point M étant à l'extérieur, du côté de la face positive du feuillet, on aura, de même,

$$V=\frac{\partial Q}{\partial a}=\int\Phi\frac{\partial p}{\partial a}dS, \tag{8}$$

et, si le feuillet est uniforme.

$$V=\Phi\frac{\partial P}{\partial a}=\Phi\int\frac{\partial p}{\partial a}dS. \tag{8'}$$

Si la face tournée du côté du point M était négative, il faudrait prendre, au contraire, les expressions

$$V = -\frac{\partial Q}{\partial a} = -\int \Phi \frac{\partial p}{\partial a} dS,$$
$$V = -\Phi \frac{\partial P}{\partial a} = -\Phi \int \frac{\partial p}{\partial a} dS.$$

364. — Dans le cas de la sphère, le potentiel p est une fonction homogène du degré -1 du rayon a et de la distance r du point M au centre, ce qui donne la condition

$$a\frac{\partial p}{\partial a} + r\frac{\partial p}{\partial r} = -p,$$

ou

$$\frac{\partial p}{\partial a} = -\frac{1}{a}\left(p + r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = -\frac{1}{a}\frac{\partial(pr)}{\partial r}.$$

Il en résulte

$$V = -\int \frac{\Phi}{a}\frac{\partial(pr)}{\partial r} dS.$$

Les distances r et a restant constantes quand on effectue l'intégration, on peut écrire

$$V = -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial r}\int pr\Phi\, dS = -\frac{1}{a}\frac{\partial(rQ)}{\partial r}. \tag{9}$$

365. Potentiel d'une couche circulaire. — Le potentiel d'un feuillet uniforme à contour circulaire peut être calculé par le potentiel d'une couche circulaire plane ou d'une couche quelconque, sphérique par exemple, limitée au même contour.

Considérons d'abord, d'une manière plus générale, une couche de révolution autour de l'axe des x. Pour un point M dont l'abscisse est x et qui est situé à une distance ρ de l'axe, le potentiel P est une fonction de x et de ρ. Si on développe ce potentiel suivant les puissances croissantes de ρ ou de $\frac{1}{\rho}$, la série obtenue ne renfermera, par raison de symétrie, que

des puissances paires de la variable. On peut donc écrire

$$(10)\quad \begin{aligned} P &= A_0 + A_2\rho^2 + A_4\rho^4 + \cdots\cdots, \\ P &= B_0 + B_2\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + B_4\left(\frac{1}{\rho}\right)^4 + \cdots\cdots, \end{aligned}$$

les coefficients $A_0, A_2 \cdots\cdots, B_0, B_2 \cdots\cdots$ étant des fonctions de x.

Lorsqu'on prend x et ρ comme variables indépendantes, l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ devient

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} = 0.$$

Cette condition donne, pour la première série, une nouvelle série développée suivant les puissances croissantes de ρ, dans laquelle les coefficients de tous les termes doivent être nuls séparément, d'où résulte la condition générale

$$\frac{\partial^2 A_{2n}}{\partial x^2} + (2n+2)^2 A_{2n+2} = 0.$$

On a ainsi successivement :

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{1}{2^2}\cdot\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2}, \\ A_4 &= -\frac{1}{4^2}\cdot\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} = +\frac{1}{(2.4)^2}\cdot\frac{\partial^4 A_0}{\partial x^4}, \\ A_6 &= -\frac{1}{6^2}\cdot\frac{\partial^2 A_4}{\partial x^2} = -\frac{1}{(2.4.6)^2}\cdot\frac{\partial^6 A_0}{\partial x^6}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{2n} &= -\frac{1}{(2n)^2}\cdot\frac{\partial^2 A_{2n-2}}{\partial x^2} = \pm\frac{1}{(2.4\ldots 2n)^2}\cdot\frac{\partial^{2n} A_0}{\partial x^{2n}}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de connaître le premier coefficient A_0 pour en déduire tous les autres. Ce coefficient A_0 est donné par l'expression du potentiel sur l'axe, laquelle dépend de la forme de la couche et de la loi de distribution.

Le potentiel en dehors de l'axe est alors

$$(11)\quad P = A_0 - \frac{\rho^2}{2^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} + \frac{\rho^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{\partial^4 A_0}{\partial x^4} - \frac{\rho^6}{(2.4.6)^2}\cdot\frac{\partial^6 A_0}{\partial x^6} + \ldots\ldots$$

Pour la seconde série, l'équation de Laplace aurait donné la condition générale

$$\frac{\partial^2 B_{2n+2}}{\partial x^2} + (2n)^2 B_{2n} = 0,$$

qui ne permet pas de déterminer de la même manière les coefficients successifs.

366. — Dans le cas d'une couche circulaire homogène de densité égale à l'unité, le potentiel P_0 sur l'axe a pour valeur, en prenant le centre pour origine des abscisses,

$$P_0 = 2\pi\left(\sqrt{a^2+x^2} - x\right).$$

Posant

$$u = \sqrt{a^2+x^2},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{u},$$

on a donc, pour le premier développement du potentiel en fonction des puissances de ρ,

$$A_0 = 2\pi(u-x),$$
$$\frac{\partial A_0}{\partial x} = 2\pi\left(\frac{\partial u}{\partial x} - 1\right) = 2\pi\left(\frac{x}{u} - 1\right),$$
$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} = 2\pi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ etc.}$$

Le potentiel P en dehors de l'axe est alors

$$(12)\quad P = 2\pi\left[u - x - \frac{\rho^2}{2^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\rho^6}{(2.4.6)^2}\cdot\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \ldots\right].$$

Les dérivées successives se calculeraient aisément.

367. — Lorsque la couche est circulaire, il est souvent plus avantageux de donner une autre forme au développement.

Désignons par a le rayon du cercle qui limite la couche, par r la distance du point M au centre du cercle, et par θ l'angle que fait la direction de cette droite avec l'axe. On peut encore exprimer le potentiel par l'une des deux séries,

$$(13)\quad \begin{aligned} P &= A_0 + A_1\left(\frac{r}{a}\right) + A_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \cdots\cdots, \\ P &= B_0 + B_1\left(\frac{a}{r}\right) + B_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \cdots\cdots, \end{aligned}$$

suivant que r est plus petit ou plus grand que a, c'est-à-dire que le point M est placé à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère de rayon a. Les coefficients sont des fonctions de l'angle θ et, comme les deux expressions doivent avoir la même valeur sur la sphère, ils satisfont à la condition

$$A_0 + A_1 + \cdots\cdots = B_0 + B_1 + \cdots\cdots$$

Le potentiel étant considéré comme une fonction de r et de θ, l'équation de Laplace devient

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial V}{\partial r} + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0.$$

On trouve ainsi que les coefficients A et B satisfont aux conditions générales

$$n(n+1)A_n + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial A_n}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 A_n}{\partial \theta^2} = 0,$$
$$n(n-1)B_n + \operatorname{cotg}\theta\frac{\partial B_n}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 B_n}{\partial \theta^2} = 0.$$

Si on développe le potentiel sur l'axe

$$P_0 = 2\pi\left[\sqrt{a^2 + x^2} - x\right],$$

en fonction des puissances croissantes de $\frac{x}{a}$ ou de $\frac{a}{x}$, on obtient les deux séries

$$(14)\quad \begin{cases} P_0 = 2\pi a\left[1 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1.1}{2.4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{x}{a}\right)^6 - \ldots\right], \\ P_0 = 2\pi a\left[\frac{1}{2}\frac{a}{x} - \frac{1.1}{2.4}\left(\frac{a}{x}\right)^3 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{a}{x}\right)^5 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{a}{x}\right)^7 + \ldots\right]. \end{cases}$$

Pour avoir l'expression du potentiel en dehors de l'axe, en fonction du rapport $\frac{r}{a}$ ou de $\frac{a}{r}$, il nous suffira de faire remarquer que, si la densité d'une couche sphérique est symétrique par rapport à un diamètre pris pour axe des x, le potentiel de cette couche en un point M ne dépend que de la distance r de ce point au centre O de la sphère et de l'angle θ que fait la droite OM avec l'axe.

D'après un théorème connu de Legendre, ce potentiel peut être exprimé par les formules générales

$$P = A_0 + A_1 X_1 \frac{r}{a} + A_2 X_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \ldots\ldots,$$

$$P = B_0 \frac{a}{r} + B_1 X_1 \left(\frac{a}{r}\right)^2 + B_2 X_2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 + \ldots\ldots,$$

dans lesquelles A_0, A_1 ⋯ B_0, B_1 ⋯ sont des coefficients constants, et X_1, X_2 ⋯ des fonctions de l'angle θ, désignées sous le nom de polynomes de Legendre, et qui sont définies par le développement

$$[1 - 2x\cos\theta + x^2]^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1 x + X_2 x^2 + X_3 x^3 + \ldots\ldots,$$

toutes ces fonctions devenant égales à l'unité lorsque l'angle θ est égal à zéro.

Comme nous connaissons le développement du potentiel d'une couche circulaire homogène pour un point de l'axe,

c'est-à-dire lorsque l'angle θ est nul et r égal à x, les coefficients sont connus. Il en résulte que, pour un point situé en dehors de l'axe, le potentiel P a pour expressions

$$(15)\quad \begin{aligned} P &= 2\pi a\left[1 - X_1\frac{r}{a} + \frac{1}{2}X_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1.1}{2.2}X_4\left(\frac{r}{a}\right)^4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}X_6\left(\frac{r}{a}\right)^6 - ..\right], \\ P &= 2\pi a\left[\frac{1}{2}\frac{a}{r} - \frac{1.1}{2.4}X_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{1.1.3}{2.4.6}X_4\left(\frac{a}{r}\right)^5 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}X_6\left(\frac{a}{r}\right)^7 + ..\right]. \end{aligned}$$

368. Potentiel d'un feuillet circulaire uniforme. — Le potentiel d'un feuillet circulaire uniforme s'obtiendra maintenant par l'expression

$$V = -\Phi\frac{\partial P}{\partial x}.$$

On trouve ainsi, avec la première forme (12),

$$V = 2\pi\Phi\left[1 - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho^2}{2^2}\cdot\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\rho^4}{(2.4)^2}\cdot\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \ldots\ldots\right].$$

Les premiers termes du développement sont alors

$$(16)\quad V = 2\pi\Phi\left\{1 - \frac{x}{u}\left[1 + \frac{3}{2^2}\frac{a^2}{u^2}\cdot\left(\frac{\rho}{u}\right)^2 - \frac{3.5}{(2.4)^2}\cdot\frac{4x^2 - 3a^2}{u^2}\cdot\left(\frac{\rho}{u}\right)^4 + .\right]\right\},$$

et la série est convergente toutes les fois que $\rho < u$.

La seconde forme de développement (13) donnerait, en prenant l'expression

$$V = \Phi\frac{\partial P}{\partial a},$$

$$(17)\quad \begin{aligned} V &= 2\pi\Phi\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2 X_2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{r}{a}\right)^4 X_4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{r}{a}\right)^6 X_6 + ..\right], \\ V &= 2\pi\Phi\frac{a}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 X_2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{a}{r}\right)^4 X_4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{a}{r}\right)^6 X_6 + ..\right]. \end{aligned}$$

369. Potentiel d'une couche sphérique. — Considérons enfin une couche sphérique quelconque de rayon a. Le potentiel en un point extérieur M à la distance r du centre peut encore être exprimée par la série

$$(18)\qquad V=a\left[A_0\left(\frac{a}{r}\right)+A_1\left(\frac{a}{r}\right)^2+A_2\left(\frac{a}{r}\right)^3+\ldots\ldots\right],$$

dans laquelle les coefficients dépendent de la loi de distribution et de la direction de la droite r.

Soit u l'angle de la droite r avec l'axe de z, l l'angle du plan rz avec le plan des yz; les coordonnées du point M sont alors

$$(19)\qquad \begin{aligned} z&=r\cos u,\\ y&=r\sin u\cos l,\\ x&=r\sin u\sin l. \end{aligned}$$

En prenant pour variables indépendantes r, u et l, l'équation de Laplace donne

$$r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\operatorname{cotg} u\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{1}{\sin^2 u}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial l^2}=0;$$

il en résulte, pour les coefficients, la condition générale

$$n(n+1)A_n+\frac{\partial^2 A_n}{\partial u^2}+\operatorname{cotg} u\frac{\partial A_n}{\partial u}+\frac{1}{\sin^2 u}\cdot\frac{\partial^2 A_n}{\partial l^2}=0.$$

L'intégrale générale de cette équation a été donnée par Laplace; si l'on pose

$$A_{n.m}=\left[\cos^{n-m}u-\frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-m-2}u\right.$$
$$\left.+\frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2.4.(2n-1)(2n-2)}\cos^{n-m-4}u-\ldots\right]\sin^m u,$$

le coefficient A_n, exprimé au moyen des nouveaux symboles,

se compose de $2n+1$ termes développés suivant les sinus et les cosinus des multiples de l'angle l et a pour valeur

$$A_n = g_{n.0}A_{n.0} + (g_{n.1}\cos l + h_{n.1}\sin l)A_{n.1}$$
$$+ (g_{n.2}\cos 2l + h_{n.2}\sin 2l)A_{n.2} + \cdots + (g_{n.n}\cos nl + h_{n.n}\sin nl)A_{n.n}.$$

Les facteurs désignés par g, h, avec différents indices, sont des coefficients numériques à déterminer dans chaque cas particulier.

270. — Si l'on considère une sphère aimantée d'une manière quelconque, son action extérieure est équivalente à celle de deux couches de masses égales et de signes contraires distribués à la surface suivant une certaine loi.

Le coefficient A_0 du premier terme est nul. En effet, à une grande distance, le potentiel devient simplement égal au quotient de la masse totale par la distance. Le produit A_0a^2 qui forme le numérateur du premier terme représente dans ce cas la masse totale, et on sait que dans tout aimant la masse totale est nulle.

Le coefficient du terme suivant a pour valeur

$$A_1 = g_{1.0}\cos u + (g_{1.1}\cos l + h_{1.1}\sin l)\sin u.$$

ou, en tenant compte des équations (19),

$$A_1 = g_{1.0}\frac{z}{r} + g_{1.1}\frac{y}{r} + h_{1.1}\frac{x}{r}.$$

Ce terme devient prédominant à une grande distance, et le potentiel se réduit alors à

$$V = A_1\frac{a^3}{r^2} = \frac{a^3 g_{0.1}}{r^2}\frac{z}{r} + \frac{a^3 g_{1.1}}{r^2}\frac{y}{r} + \frac{a^3 h_{1.1}}{r^2}\frac{x}{r};$$

il en résulte (**151**) que les trois produits $a^3g_{0.1}$, $a^3g_{1.1}$, $a^3h_{1.1}$ représentent respectivement les moments magnétiques de la sphère par rapport aux axes des z, des y et des x. En dé-

signant par a^2K le moment magnétique résultant et par α, β et γ les cosinus des angles que fait sa direction avec les axes, on a

$$K = \frac{h_{1.1}}{\alpha} = \frac{g_{1.1}}{\beta} = \frac{g_{1.0}}{\gamma} = \sqrt{h_{1.1}^2 + g_{1.1}^2 + g_{1.0}^2}.$$

271. Aimants solénoïdaux. — Le potentiel d'un aimant solénoïdal (**230**) ne dépend que des surfaces formées par les extrémités des solénoïdes élémentaires qui le constituent.

Si tous ces solénoïdes sont fermés, le potentiel de l'aimant est nul partout, et la force magnétique nulle. Dans ce cas, l'induction se réduit en chaque point à $4\pi I$ et elle est parallèle à l'aimantation.

272. — Supposons qu'un aimant solénoïdal soit limité par une surface du canal, l'aimantation étant en chaque point normale à la section droite du canal. Le flux d'induction Q qui traverse un élément dS de la section droite est égal à $4\pi I dS$ et le flux total d'induction a pour valeur

$$Q = 4\pi \int I dS.$$

Chacun des filets solénoïdaux forme une courbe fermée, de longueur l, normale en chaque point à la section droite du canal. Si la structure de l'aimant est telle, comme nous en verrons plus loin des exemples, que le produit de l'intensité d'aimantation I d'un filet par sa longueur l soit une quantité constante A, le flux d'induction pourra être exprimé par la formule

$$(20) \qquad Q = 4\pi \int I dS = 4\pi A \int \frac{dS}{l}.$$

Si l'aimant est un anneau de révolution et qu'on appelle x le rayon d'un solénoïde élémentaire, on aura

$$Q = 4\pi A \int \frac{dS}{2\pi x} = 2A \int \frac{dS}{x}.$$

Considérons, par exemple, un tore. Soit a le rayon de la section et R la distance de son centre à l'axe de rotation, pris comme axe des z; on a alors

$$\int \frac{dS}{x} = \int_{R-a}^{R+a} \frac{z}{x}\,dx = \pi\left[R - \sqrt{R^2 - a^2}\right],$$

et le flux total d'induction a pour valeur

$$(21) \qquad Q = 2\pi A\left[R - \sqrt{R^2 - a^2}\right].$$

373. Cylindre. — Un cylindre aimanté uniformément et terminé par des sections droites équivaut à deux couches magnétiques de densités $\pm I$, égales et de signes contraires, qui recouvriraient les deux bases A et B. Le potentiel d'un pareil aimant en un point quelconque est donc égal à la somme des potentiels V_a et V_b des deux couches terminales.

Si la section droite du cylindre est circulaire, les potentiels V_a et V_b peuvent être exprimés par les formules trouvées précédemment (**365** et **366**).

Pour un point M situé sur l'axe à l'extérieur et du côté de la face positive A, la force magnétique a pour expression (**322**), en désignant par α et β les angles sous lesquels on voit du point M les rayons des deux bases,

$$F = 2\pi I(1 - \cos\alpha) - 2\pi I(1 - \cos\beta) = 2\pi I(\cos\beta - \cos\alpha),$$

et elle est dirigée dans le sens de l'aimantation.

Pour un point intérieur, les actions des deux bases sont de même signe, ce qui donne une force

$$F = 4\pi I - 2\pi I(\cos\alpha + \cos\beta),$$

dirigée en sens contraire de l'aimantation.

Enfin, l'induction sur l'axe à l'intérieur est

$$F_1 = 4\pi I - F = 2\pi I(\cos\alpha + \cos\beta);$$

elle est parallèle à l'aimantation et varie très lentement tant que le point considéré est à une distance notable des bases.

Si on désigne par l la longueur du cylindre et par a son rayon, l'induction F_0 au centre du cylindre a pour valeur

$$F_0 = 2\pi I . 2\cos\alpha = 4\pi I \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = 4\pi I \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2a}{l}\right)^2}}.$$

Lorsque la longueur du cylindre est très grande par rapport à son diamètre, on peut prendre l'expression approchée

$$F_0 = 4\pi I \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{l}\right)^2\right].$$

L'induction est alors sensiblement la même dans toute l'étendue de la section médiane, et le flux total d'induction Q_0 qui le traverse a pour expression

$$Q_0 = \pi a^2 F_0 = (2\pi a)^2 I \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{l}\right)^2\right].$$

Si le cylindre est assez long pour que la parenthèse ne diffère pas sensiblement de l'unité, le flux d'induction dans la section médiane est égal à $(2\pi a)^2 I$. Ce flux est donc proportionnel au carré du contour; il a encore sensiblement la même valeur dans une section quelconque suffisamment éloignée des extrémités.

CHAPITRE QUATRIÈME

INDUCTION MAGNÉTIQUE

374. Caractères généraux de l'induction magnétique. — Il n'existe probablement aucun corps qui placé dans un champ magnétique n'éprouve l'effet de l'induction, c'est-à-dire ne devienne lui-même un aimant, au moins d'une manière temporaire.

Lorsque le corps est isotrope, l'axe d'aimantation induite coïncide en chaque point avec la direction de la force magnétique. Pour certains corps l'aimantation induite est de même sens que la force; ce sont les corps que nous avons appelés *paramagnétiques* ou simplement *magnétiques*. Pour les autres, le sens de l'aimantation est opposé à celui de la force; ce sont les corps *diamagnétiques*. En présence d'un pôle d'aimant, les corps de la première classe prennent dans la partie la plus voisine un pôle de signe contraire, ceux de la seconde un pôle de même signe.

Nous admettrons qu'en chaque point d'un corps isotrope soumis à l'induction magnétique, l'aimantation est proportionnelle à la résultante de toutes les forces magnétiques qui s'exercent en ce point. Ces forces dépendent, non seulement du champ primitif, mais aussi du magnétisme développé par induction sur le corps lui-même. En désignant par F la force résultante, à laquelle on donne quelquefois le nom de *force magnétisante*, par I l'intensité d'aimantation, on peut écrire

$$\text{(1)} \qquad I = kF.$$

Le facteur k, qui exprime le rapport de l'aimantation à la force magnétisante, est appelé *coefficient d'aimantation induite;* ce coefficient est positif ou négatif suivant qu'il s'agit d'un corps magnétique proprement dit ou d'un corps diamagnétique.

L'hypothèse de la proportionnalité de l'aimantation à la force magnétisante se vérifie d'une manière très approchée toutes les fois que le coefficient k a une valeur très faible. Cette condition est réalisée pour la plupart des corps magnétiques, sauf le fer, le nickel et le cobalt. Quand il s'agit du fer ou du nickel, pour lesquels le coefficient k peut atteindre des valeurs très grandes, telles que 30 ou 40, la proportionnalité existe encore tant que la force F ne dépasse pas une certaine limite, quand ces corps, par exemple, sont aimantés par la terre. Il en est de même avec le fer impur, le fer écroui, la fonte et l'acier plus ou moins trempé, dont le coefficient d'aimantation est notablement plus faible. Le coefficient k est toujours très petit pour les corps diamagnétiques; il atteint à peine $\frac{1}{400\,000}$ pour le bismuth qui est le corps le plus actif de cette seconde classe.

Si la proportionnalité de l'aimantation à la force magnétisante n'existe pas, on doit considérer le coefficient k comme étant lui-même une fonction de l'aimantation. Nous examinerons d'abord le cas où ce coefficient est constant et le même dans toutes les directions, c'est-à-dire où le corps est isotrope et l'aimantation induite assez faible.

375. Aimantation induite proportionnelle à la force magnétisante. — Considérons un corps quelconque dans le champ magnétique. Soit V le potentiel du champ et Ω celui qui est produit par les masses induites, le potentiel résultant U aura pour valeur

$$U = V + \Omega.$$

En un point quelconque les composantes de la force magnétisante parallèles aux axes sont

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

La force elle-même a pour expression.

$$F = -\frac{dU}{dn};$$

sa direction est celle de la normale n à la surface de niveau qui passe par le point considéré.

L'intensité d'aimantation I et ses composantes A, B et C parallèles aux axes deviennent alors

$$I = kF = -k\frac{dU}{dn},$$

$$A = -k\frac{\partial U}{\partial x}, \quad B = -k\frac{\partial U}{\partial y}, \quad C = -k\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Ajoutant ces dernières équations après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz, il vient

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = -k\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = -k\,dU.$$

Si la valeur de k est constante dans toute l'étendue du corps, le premier membre de l'équation est la différentielle exacte d'une fonction Φ des coordonnées, et on a

$$A = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Il en résulte (332) que l'aimantation est *lamellaire*.

376. L'aimantation induite est superficielle. — D'un autre côté, l'expression générale de la densité magnétique

$$\rho = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

se réduit ici à

$$\rho = -k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = -k\Delta U.$$

Comme, en vertu de l'équation de Poisson, on a $\Delta U = -4\pi\rho$, il vient

$$\rho(1+4\pi k)=0, \quad \text{ou} \quad \rho=0;$$

c'est-à-dire que *la densité magnétique est nulle dans toute l'étendue du corps*. L'aimantation est donc aussi *solénoïdale* et il n'y a de magnétisme sensible qu'à la surface.

Cette conclusion suppose que la parenthèse $1+4\pi k$ n'est pas nulle ; mais ce dernier cas ne se présente jamais, la valeur

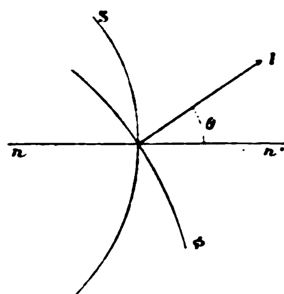


Fig. 84

absolue de k pour les corps diamagnétiques étant très loin d'atteindre $\frac{1}{4\pi}$.

377. — La densité superficielle σ de la couche induite est, en appelant θ l'angle de l'aimantation avec la normale à la surface (fig. 84),

$$\sigma = I\cos\theta.$$

Désignons cette normale par n quand on la compte vers l'intérieur, par n' quand on la compte vers l'extérieur, et soit a la normale à la surface pour laquelle la fonction Φ conserve une valeur constante, on a

$$I=\frac{d\Phi}{da},$$

$$\sigma = I\cos\theta = \frac{\partial\Phi}{\partial n'} = \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}.$$

278. — Le potentiel dû aux masses induites, c'est-à-dire à la couche superficielle, a pour valeur

$$\Omega = \iint \frac{\sigma dS}{r}.$$

La fonction Ω est finie et continue et satisfait à l'équation de Laplace aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la surface. Si on désigne par Ω' la valeur qu'elle prend à l'extérieur, on aura, pour deux points voisins situés de part et d'autre de la surface, la condition

$$\Omega = \Omega'.$$

279. Équation de continuité. — Coefficient d'induction. — Le principe de la conservation du flux d'induction (**223**) permet d'établir très simplement les conditions de continuité des potentiels V, U et Ω à la surface du corps aimanté.

Considérons deux points infiniment voisins pris sur une même normale de part et d'autre de la surface ; soit F_1 la valeur de l'induction au point intérieur, F'_1 la valeur de la force magnétique au point extérieur. Si $(F_1)_n$ et F'_n désignent les composantes normales de ces deux forces comptées dans une même direction, on a, en vertu du théorème de la conservation du flux, la condition

$$(F_1)_n = F'_n.$$

L'aimantation étant parallèle à la force magnétisante, l'induction devient, dans le cas actuel,

$$F_1 = F + 4\pi I = F + 4\pi k F = F(1 + 4\pi k);$$

elle est proportionnelle à la force magnétisante.

Si l'on pose

$$\mu = 1 + 4\pi k,$$

on a donc

$$F_1 = \mu F,$$

et l'équation relative à la surface devient alors

$$(2) \qquad \mu F_n = F'_n, \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{F'_n}{F_n}.$$

Ainsi, *pour deux points infiniment voisins pris de part et d'autre de la surface, le rapport des composantes normales de la force magnétique est constant.* C'est la conséquence fondamentale de la théorie de Poisson dont nous avons déjà fait usage (111) pour définir les diélectriques. Le coefficient μ représentait le pouvoir inducteur spécifique du diélectrique; nous l'appellerons ici le *coefficient d'induction magnétique.* Il importe de ne pas le confondre avec le coefficient d'aimantation induite qui a été représenté par k.

280. — En exprimant l'équation (2) en fonction des potentiels, on obtient

$$\mu \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U'}{\partial n'} = 0,$$

ou

$$(3) \qquad \mu\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial \Omega}{\partial n}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial n'} + \frac{\partial \Omega'}{\partial n'}\right) = 0.$$

Pour déterminer l'aimantation d'un corps placé dans un champ magnétique et limité par une surface S, il faut donc trouver deux fonctions Ω et Ω' qui satisfassent aux conditions suivantes :

1° La fonction Ω est finie et continue dans l'intérieur de la surface et satisfait à l'équation de Laplace $\Delta\Omega = 0$.

2° La fonction Ω' est finie et continue à l'extérieur, nulle à l'infini, et satisfait également à l'équation de Laplace.

3° Les fonctions Ω et Ω' sont égales entre elles sur la surface et leurs dérivées satisfont alors à l'équation de continuité (3).

Ces fonctions représentent le potentiel d'une couche magnétique distribuée sur la surface du corps. La densité de cette couche en chaque point est déterminée par la variation des composantes normales, ce qui donne

$$F'_n - F_n = 4\pi\sigma;$$

on en déduit

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(F'_n - F_n) = \frac{\mu - 1}{4\pi} F_n = kF_n.$$

381. Cas de deux milieux magnétiques différents. — Aimantation relative. — Supposons que le corps A, limité par la surface S, soit situé dans un milieu magnétique dont le coefficient d'induction est μ' ; le théorème de la conservation du flux d'induction donne encore

$$\mu F_n = \mu' F'_n,$$

c'est-à-dire

$$\mu \frac{\partial U}{\partial n} + \mu' \frac{\partial U'}{\partial n'} = 0,$$

ou

$$(4) \qquad \mu\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial \Omega}{\partial n}\right) + \mu'\left(\frac{\partial V}{\partial n'} + \frac{\partial \Omega'}{\partial n'}\right) = 0.$$

Les fonctions Ω et Ω' qui déterminent la couche superficielle sont définies par les mêmes conditions que précédemment, avec cette seule différence que l'équation de continuité (4) renferme les coefficients d'induction des deux milieux.

La densité superficielle est encore donnée par les composantes normales

$$4\pi\sigma = F'_n - F_n = F_n\left(\frac{\mu}{\mu'} - 1\right).$$

Si l'on pose

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\mu'} = 1 + 4\pi k_1,$$

c'est-à-dire

$$k_1 = \frac{\mu - \mu'}{4\pi\mu'} = \frac{k - k'}{1 + 4\pi k'},$$

l'expression de la densité devient

$$4\pi\sigma = F_n(\mu_1 - 1), \qquad \text{ou} \qquad \sigma = k_1 F_n.$$

Cette couche superficielle est celle qui détermine le mouvement du corps A dans le milieu. Elle est la même que si le

milieu extérieur était supprimé, ou plus exactement remplacé par de l'air, et le coefficient d'induction du corps remplacé par une autre valeur μ_1, ou le coefficient d'aimantation k par une valeur différente k_1. L'aimantation apparente I_1 du corps aurait alors pour projection normale

$$I_1 \cos\theta = \sigma = \frac{1}{4\pi}(\mu_1 - 1) F_n = k_1 F_n.$$

382. — La discussion de ce problème donne lieu à quelques conséquences analogues à celles qu'on déduit du principe d'Archimède pour les corps plongés dans les fluides.

On peut, en effet, considérer k_1 comme le coefficient relatif d'aimantation du corps par rapport au milieu qui l'entoure, k et k' étant les coefficients des deux milieux par rapport à l'air. Si le coefficient k du corps est plus grand que le coefficient k' du milieu, la valeur de k_1 est positive et l'aimantation apparente du corps est positive. Si l'on a, au contraire, $k < k'$, la valeur de k_1 est négative et le corps paraîtra diamagnétique. Dans le cas où les coefficients k et k' seraient égaux, l'aimantation du corps A paraîtrait nulle, ce qui doit être puisqu'il serait situé dans un milieu identique à lui-même et que le magnétisme induit est superficiel.

On serait ainsi conduit à admettre qu'il n'existe pas une opposition réelle de propriétés entre les corps magnétiques et les corps diamagnétiques, et que la différence des effets est due à la nature plus ou moins magnétique du milieu extérieur. Les corps diamagnétiques conservant leurs propriétés caractéristiques dans le vide le plus parfait qu'on puisse produire, il faut admettre, dans cette manière de voir, que le vide est un milieu magnétique et que son coefficient d'aimantation est plus grand en valeur absolue que celui de tous les corps diamagnétiques connus.

Si, au contraire, on veut admettre la valeur zéro pour le coefficient d'aimantation du vide, il faut donner une valeur négative à ceux de tous les corps diamagnétiques. Dans ce cas, le coefficient d'induction μ est plus grand que l'unité pour les corps magnétiques et plus petit que l'unité pour les corps

diamagnétiques. On ne connaît d'ailleurs aucun corps pour lequel μ soit négatif, car le coefficient d'aimantation des corps diamagnétiques n'est jamais plus grand que $\frac{1}{4\pi}$ en valeur absolue ; nous avons déjà dit que pour le bismuth, le corps le plus diamagnétique connu, on a environ $k = -\frac{1}{400\,000}$. Le coefficient d'induction des corps diamagnétiques ne diffère donc de l'unité que d'une quantité extrêmement petite. Pour le fer doux et le nickel, le coefficient k étant compris entre 30 et 40, la valeur de μ est voisine de 500 ; le rapport des deux valeurs absolues de k pour le fer et le bismuth est donc à peu près

$$40 \times 400\,000 = 1,6.\,10^7.$$

Remarquons cependant que l'influence d'un milieu magnétique ne pourrait en toute rigueur être comparée à celle d'un fluide, et permettre d'appliquer le principe d'Archimède, que si l'on avait $k_1 = k - k'$. Il est vrai que cette relation, d'après la remarque qui précède, est très sensiblement vérifiée pour tous les corps diamagnétiques et tous les corps très peu magnétiques ; mais elle serait fort éloignée de la vérité si le milieu ambiant avait un coefficient d'aimantation voisin de l'unité, et surtout si les propriétés magnétiques du milieu étaient comparables à celles du fer doux.

383. Susceptibilité et perméabilité magnétiques. — Les phénomènes d'induction magnétique peuvent s'exprimer, comme on le voit, à l'aide de deux coefficients.

Le *coefficient d'aimantation induite* k exprime le rapport de l'intensité de l'aimantation à la force magnétique, ou, en d'autres termes, l'intensité d'aimantation dans un champ égal à l'unité. Ce coefficient porte quelquefois le nom de Neumann, qui l'a employé le premier. Sir W. Thomson l'appelle *coefficient de susceptibilité magnétique*.

Le second coefficient, désigné par μ, est le *coefficient d'induction magnétique ;* c'est l'analogue du pouvoir inducteur spécifique d'un diélectrique en électricité. Il est égal au rap-

elle est parallèle à l'aimantation et varie très lentement tant que le point considéré est à une distance notable des bases.

Si on désigne par l la longueur du cylindre et par a son rayon, l'induction F_0 au centre du cylindre a pour valeur

$$F_0 = 2\pi I . 2\cos\alpha = 4\pi I \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = 4\pi I \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2a}{l}\right)^2}}.$$

Lorsque la longueur du cylindre est très grande par rapport à son diamètre, on peut prendre l'expression approchée

$$F_0 = 4\pi I \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{l}\right)^2\right].$$

L'induction est alors sensiblement la même dans toute l'étendue de la section médiane, et le flux total d'induction Q_0 qui le traverse a pour expression

$$Q_0 = \pi a^2 F_0 = (2\pi a)^2 I \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{l}\right)^2\right].$$

Si le cylindre est assez long pour que la parenthèse ne diffère pas sensiblement de l'unité, le flux d'induction dans la section médiane est égal à $(2\pi a)^2 I$. Ce flux est donc proportionnel au carré du contour; il a encore sensiblement la même valeur dans une section quelconque suffisamment éloignée des extrémités.

CHAPITRE QUATRIÈME

INDUCTION MAGNÉTIQUE

374. Caractères généraux de l'induction magnétique. — Il n'existe probablement aucun corps qui placé dans un champ magnétique n'éprouve l'effet de l'induction, c'est-à-dire ne devienne lui-même un aimant, au moins d'une manière temporaire.

Lorsque le corps est isotrope, l'axe d'aimantation induite coïncide en chaque point avec la direction de la force magnétique. Pour certains corps l'aimantation induite est de même sens que la force; ce sont les corps que nous avons appelés *paramagnétiques* ou simplement *magnétiques*. Pour les autres, le sens de l'aimantation est opposé à celui de la force; ce sont les corps *diamagnétiques*. En présence d'un pôle d'aimant, les corps de la première classe prennent dans la partie la plus voisine un pôle de signe contraire, ceux de la seconde un pôle de même signe.

Nous admettrons qu'en chaque point d'un corps isotrope soumis à l'induction magnétique, l'aimantation est proportionnelle à la résultante de toutes les forces magnétiques qui s'exercent en ce point. Ces forces dépendent, non seulement du champ primitif, mais aussi du magnétisme développé par induction sur le corps lui-même. En désignant par F la force résultante, à laquelle on donne quelquefois le nom de *force magnétisante*, par I l'intensité d'aimantation, on peut écrire

$$(1) \qquad I = kF.$$

Comme l'action intérieure d'un corps aimanté uniformément est donnée (354) par les dérivées partielles du second ordre du potentiel P d'une masse homogène, la force CI ne peut être constante que si la fonction P est représentée par une polynome du second degré, c'est-à-dire que si le corps est limité par une surface du second degré. Lorsque le coefficient k est très petit, c'est-à-dire pour tous les corps diamagnétiques et les corps peu magnétiques, on a sensiblement

$$I = k\varphi.$$

Dans ce cas, l'aimantation induite dans un champ uniforme est uniforme et indépendante de la surface du corps.

On peut remarquer d'ailleurs que l'induction magnétique est soumise aux mêmes lois que l'induction des diélectriques, de sorte que tous les résultats auxquels nous sommes arrivés en électrostatique sont applicables au magnétisme, sans autre modification que la substitution du potentiel magnétique au potentiel électrique, et du coefficient d'induction magnétique au pouvoir inducteur spécifique.

386. Sphère. — Pour une sphère aimantée uniformément, on a (355)

$$C = -\frac{4}{3}\pi.$$

L'aimantation produite sur une sphère par un champ uniforme sera donc

$$I = \frac{k}{1 + \frac{4}{3}\pi k}\varphi = \frac{3}{4\pi}\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\varphi = \frac{3}{4\pi}h\varphi.$$

Le coefficient h ou $\frac{\mu - 1}{\mu + 2}$ est égal à l'unité pour les corps conducteurs en électricité; il est toujours positif et plus petit que l'unité pour les corps magnétiques, et il diffère peu de l'unité quand μ est grand. Ce coefficient est, au contraire, négatif et très petit pour les corps diamagnétiques.

Le moment magnétique de la sphère a pour valeur

$$\varpi = u\mathrm{I} = h\mathrm{R}^3\varphi.$$

A l'intérieur, la force résultante est

$$\mathrm{F} = \varphi - \frac{4}{3}\pi\mathrm{I} = \varphi(1 - h) = \varphi\frac{3}{\mu + 2},$$

et l'induction

$$\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}\mu = \varphi\frac{3\mu}{\mu + 2}.$$

La première de ces expressions représente également la force totale extérieure sur un point voisin de l'équateur, et la seconde sur un point voisin du pôle. Le rapport de ces deux forces est donc égal à $\frac{1}{\mu}$.

Dans le cas où μ est très grand, les formules se simplifient, et l'on a sensiblement

$$\mathrm{F} = \frac{3}{\mu}\varphi,$$
$$\mathrm{F}_1 = 3\varphi,$$
$$\varpi = \mathrm{R}^3\varphi.$$

387. Hypothèse de Poisson. — Si l'on imagine, avec Poisson, qu'un corps magnétique soit constitué par un ensemble de petites sphères d'une conductibilité magnétique absolue ($\mu = \infty$), disséminées dans un milieu non magnétique, le rapport du volume occupé par toutes les sphères au volume total a pour expression (**167**)

$$h = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}.$$

En adoptant la valeur $\mu = 500$ pour le fer, il vient

$$h = 1 - \frac{3}{500} = 1 - \frac{1}{167}$$

Or la valeur maximum que puisse atteindre le rapport h avec des sphères égales est $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3,86}$. Il faudrait donc supposer dans le cas actuel que les sphères ont des volumes inégaux et que les intervalles des plus grosses sont remplis par des sphères d'un diamètre moindre. Seulement il paraît alors bien difficile que les sphères voisines ne réagissent pas les unes sur les autres et que l'aimantation de chacune d'elles, comme le suppose la théorie de Poisson, puisse être déterminée uniquement par le champ extérieur.

388. Ellipsoïde. — Cylindre. — Pour un ellipsoïde aimanté uniformément dans une direction quelconque, les composantes de la force intérieure parallèles aux axes sont égales respectivement à $-AL$, $-BM$ et $-CN$ (**356**).

Dans un champ uniforme, où la force φ fait avec les axes des angles dont les cosinus sont $\lambda, \lambda', \lambda''$, les composantes de l'aimantation seront

$$A = \frac{k}{1 + kL}\varphi\lambda,$$

$$B = \frac{k}{1 + kM}\varphi\lambda',$$

$$C = \frac{k}{1 + kN}\varphi\lambda''.$$

Ces équations supposent que l'aimantation est assez faible pour qu'il soit permis de superposer les effets produits dans des directions différentes.

Si l'un des axes de l'ellipsoïde est parallèle à la direction du champ, l'axe des x par exemple, on a

$$I = \frac{k}{1 + kL}\varphi,$$

et, quelque grande que soit la valeur de k, l'aimantation sera uniforme.

On pourra, par les résultats indiqués au n° **357**, appliquer cette expression à différents cas particuliers.

Pour un cylindre circulaire indéfini perpendiculaire à la direction du champ (**358**), on aurait

$$I = \frac{k}{1 + 2\pi k}\varphi.$$

389. Problème de Barlow. — Le cas d'une couche diélectrique comprise entre les surfaces de deux sphères concentriques et située dans un champ uniforme (**168**) correspond à celui d'une couche magnétique de même forme placée dans

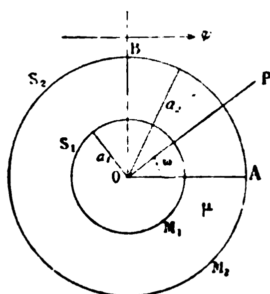


Fig. 85

les mêmes conditions. Cette question est connue sous le nom de *problème de Barlow*.

Il se produit alors, comme nous l'avons vu en électricité (**165**), deux couches magnétiques, l'une M_1 sur la surface interne S_1 (fig. 85), et l'autre M_2 sur la surface externe S_2 du volume considéré.

Les actions intérieures F_1 et F_2 de ces deux couches sont déterminées par les équations

$$\frac{F_1}{3(\mu-1)} = \frac{-F_2}{(\mu-1)[1+2\mu-2(\mu-1)\beta]} = \frac{\varphi}{9\mu+2(\mu-1)^2(1+\beta)},$$

où β désigne le rapport $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$ des cubes des rayons.

L'action des deux couches est constante dans l'intérieur de

la petite sphère S_1 et a pour valeur

$$F=\frac{\varphi}{1+\frac{2(\mu-1)^2}{9\mu}(1-\beta)},$$

mais elle n'est pas constante dans l'épaisseur de la substance magnétique ni à l'extérieur.

On a donc, pour l'action totale $\varphi-F$ à l'intérieur,

$$\frac{\varphi-F}{F}=\frac{2(\mu-1)^2}{9\mu}(1-\beta)=\frac{8\pi k}{9\left(\frac{1}{4\pi k}+1\right)}(1-\beta),$$

et, si k est très grand,

$$\frac{\varphi-F}{F}=\frac{8}{9}\pi k(1-\beta).$$

Le potentiel extérieur en P des couches M_1 et M_2, à la distance r du centre et sur un rayon qui fait l'angle ω avec la force du champ, est

$$V_e=-\frac{\cos\omega}{r^2}[F_1a_1^3+F_2a_2^3]=-\frac{a_2^3\cos\omega}{r^2}[F_1\beta+F_2]$$
$$=\frac{a_2^3\cos\omega}{r^2}\frac{(\mu-1)(1+\mu)(1-\beta)}{(1+2\mu)(\mu+2)-2\beta(\mu-1)^2}\varphi=A\frac{a_2^3\cos\omega}{r^2}\varphi,$$

en posant

$$A=\frac{(\mu-1)(1+2\mu)(1-\beta)}{(\mu+2)(1+2\mu)-2\beta(\mu-1)^2}.$$

On en déduit, pour l'action du magnétisme induit en deux points situés à la distance r sur la ligne OA et sur la ligne OB, c'est-à-dire au pôle et à l'équateur,

$$X_p=2\left(\frac{a_2}{r}\right)^3A\varphi,$$
$$X_e=\left(\frac{a_2}{r}\right)^3A\varphi.$$

390. — Pour une sphère pleine on a $\beta = 0$, et, par suite.

$$A_0 = \frac{(\mu - 1)(1 + 2\mu)}{(1 + 2\mu)(\mu + 2)} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} = h.$$

Le rapport des actions exercées au même point par une sphère creuse et par une sphère pleine de même diamètre extérieur est donc

$$\frac{A}{A_0} = \frac{(\mu + 2)(1 + 2\mu)(1 - \beta)}{(\mu + 2)(1 + 2\mu) - 2\beta(\mu - 1)} = \frac{1}{1 + \frac{9\mu}{(\mu + 2)(1 + 2\mu)} \cdot \frac{\beta}{1 - \beta}}.$$

Si on applique cette formule au fer il vient, en prenant $\mu = 500$,

$$\frac{A}{A_0} = \frac{1}{1 + \frac{1}{112} \cdot \frac{\beta}{1 - \beta}}.$$

En donnant à β différentes valeurs, on trouve que, tant que l'épaisseur de la couche sphérique est plus grande que le cinquième du rayon, l'action magnétique à l'extérieur ne diffère pas de 0,01 de celle que donnerait une sphère pleine de même diamètre.

Les expériences anciennes de Barlow sont conformes aux résultats de ce calcul. Avec des sphères de 10 pouces de diamètre extérieur, Barlow n'a pas trouvé de différence appréciable entre les actions exercées par deux sphères différentes, l'une pleine et l'autre creuse, cette dernière ayant une épaisseur égale aux $\frac{2}{3}$ du rayon.

Au contraire, l'action de la sphère creuse n'était que les $\frac{2}{3}$ de celle de la sphère pleine, quand l'épaisseur était réduite à $\frac{1}{30}$ de pouce environ. Avec la valeur de $\mu = 500$, le calcul donnerait $\frac{1}{2}$ pour le rapport des deux actions.

391. — Nous avons vu (388) que l'action totale au voisinage d'une sphère pleine est, auprès du pôle,

$$F_p = \varphi \frac{3\mu}{\mu+2},$$

et, auprès de l'équateur,

$$F_e = \varphi \frac{3}{\mu+2}.$$

En faisant encore $\mu = 500$, comme pour le fer doux, il vient

$$F_p = 3\varphi \frac{1}{1+\frac{2}{500}} = 3\varphi\left(1 - \frac{2}{250}\right),$$

$$F_e = 3\varphi \frac{1}{502} = 3\varphi \frac{1}{500}.$$

La force est sensiblement nulle à l'équateur, et elle a pris au pôle une valeur triple de la force du champ.

Si le coefficient μ est voisin de l'unité et qu'on pose

$$\mu = 1 + x,$$

on obtient de même

$$F_p = \varphi \frac{1+x}{1+\frac{x}{3}} = \varphi\left(1 + \frac{2x}{3}\right),$$

$$F_e = \varphi \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \varphi\left(1 - \frac{x}{3}\right).$$

A l'intérieur d'une sphère creuse, la force est

$$F = \varphi \frac{1}{1 + \frac{2(\mu-1)^2}{9\mu}\cdot(1-\beta)}$$

Si le coefficient μ est très grand, on peut écrire

$$F = \varphi \frac{1}{1 + \frac{2}{9}(\mu - 2)(1 - \beta)}.$$

Si le coefficient μ est très voisin de l'unité et qu'on pose encore $\mu = 1 + \alpha$, il vient

$$\frac{F}{\varphi} = \frac{1}{1 + \frac{2}{9}\alpha^2(1 - \beta)} = 1 - \frac{2}{9}\alpha^2(1 - \beta).$$

Une petite aiguille aimantée introduite dans la sphère creuse y détermine une nouvelle couche induite qui se superposera à la première et dont il est facile de calculer la distribution, puisque l'action extérieure d'une pareille aiguille équivaut à celle d'une sphère aimantée uniformément ; mais l'action de cette nouvelle couche sera toujours parallèle à l'axe magnétique de l'aiguille et n'influera pas sur sa direction. Les oscillations de cette aiguille ne dépendent donc que de l'action résultante du champ extérieur et des couches induites par le champ lui-même.

392. Corps anisotropes. — Considérons une sphère anisotrope dans un champ uniforme. Soient k, k', k'' les trois coefficients principaux d'aimantation et $\lambda, \lambda', \lambda''$ les cosinus des angles de l'intensité φ du champ avec les axes ; les coefficients d'aimantation étant supposés très petits, les intensités des trois aimantations partielles auront pour valeurs

$$\begin{aligned} I &= k\lambda\varphi, \\ I' &= k'\lambda'\varphi, \\ I'' &= k''\lambda''\varphi; \end{aligned}$$

et les moments magnétiques correspondants seront

$$\begin{aligned} m &= uI = u\varphi k\lambda, \\ m' &= uI' = u\varphi k'\lambda', \\ m'' &= uI'' = u\varphi k''\lambda''. \end{aligned}$$

On en déduit, pour le moment magnétique résultant,

$$M^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 = u^2\varphi^2(k^2\lambda^2 + k'^2\lambda'^2 + k''^2\lambda''^2) = u^2\varphi^2 H^2.$$

L'axe magnétique résultant de la sphère fait avec les axes de coordonnées des angles dont les cosinus $\alpha, \alpha', \alpha''$ sont donnés par les équations

$$\frac{\alpha}{k\lambda} = \frac{\alpha'}{k'\lambda'} = \frac{\alpha''}{k''\lambda''} = \frac{1}{H},$$

et cet axe fait avec la direction du champ un angle θ défini par la relation

$$\cos\theta = \alpha\lambda + \alpha'\lambda' + \alpha''\lambda'' = \frac{k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''\lambda''^2}{H}.$$

En désignant par M' le moment du couple produit par l'action du champ sur la sphère, on a

$$M' = \varphi M \sin\theta,$$

ou, en remplaçant M et θ par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} M'^2 &= \varphi^2 M^2(1 - \cos^2\theta) = u^2\varphi^4[H^2 - (k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''^2\lambda''^2)] \\ &= u^2\varphi^4[k^2\lambda^2 + k'^2\lambda'^2 + k''^2\lambda''^2 - (k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''\lambda''^2)(\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2)] \\ &= u^2\varphi^4\{[\lambda'\lambda''(k' - k'')]^2 + [\lambda''\lambda(k'' - k)]^2 + [\lambda\lambda'(k - k')]^2\}. \end{aligned}$$

La sphère ne peut être en équilibre qui si le couple produit par l'action du champ est nul ; il faut donc que les trois carrés compris dans la parenthèse soient nuls séparément. Comme les coefficients k, k', k'' sont différents, par hypothèse, il faut que deux des cosinus $\lambda, \lambda', \lambda''$ soient égaux à zéro et, par suite, que l'un des axes principaux d'aimantation coïncide avec la direction du champ.

Le calcul qui précède convient également à un corps homogène de forme quelconque situé dans un champ uniforme, puisque le moment magnétique par rapport à l'un des axes

principaux est simplement proportionnel au volume du corps et à la composante de la force du champ.

Si le champ est variable, on supposera infiniment petit le volume considéré de la substance ; le moment du couple qui tend à le faire tourner autour de son centre de gravité aura encore la même expression en fonction de l'intensité du champ au point occupé par l'élément de volume.

393. Détermination expérimentale des coefficients d'aimantation. — Lorsqu'un cylindre est aimanté d'une manière uniforme parallèlement à l'axe, l'action qu'il exerce sur un point intérieur ne dépend que des deux couches terminales. Si le cylindre est très allongé, cette action est négligeable pour tous les points dont la distance à l'une des extrémités reste très grande par rapport au diamètre : la force résultante sera donc produite uniquement par les masses extérieures. Si le champ extérieur est uniforme et parallèle à l'axe, l'aimantation dans la plus grande partie du cylindre sera uniforme et proportionnelle à l'intensité du champ. Dans le voisinage des extrémités seulement, l'aimantation induite sera un peu modifiée : la couche superficielle, au lieu d'être uniforme et limitée à la surface terminale, aura une distribution plus complexe et se répandra en partie sur les surfaces latérales.

D'après cela, le coefficient d'aimantation d'une substance isotrope peut être défini comme le quotient par la force du champ de l'intensité de l'aimantation qu'acquiert un cylindre infiniment mince de la substance, placé parallèlement à la force dans un champ uniforme, ou l'aimantation qu'il prend dans un champ égal à l'unité.

De même, le coefficient d'aimantation d'un milieu anisotrope dans une direction déterminée est l'aimantation longitudinale que prendrait un cylindre infiniment mince parallèle à cette direction dans un champ égal à l'unité.

394. — On voit aussi que, pour déterminer le coefficient d'aimantation de corps très magnétiques comme le fer, on ne peut se servir de l'action extérieure produite par des sphères ou des corps allongés dans une direction perpendiculaire au champ. En effet, le rapport de l'aimantation à la force est

respectivement égal à

$$\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{4\pi k}},\quad \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4\pi k}},\quad \frac{2}{4\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{4\pi k}},$$

suivant que le corps est une sphère, un disque ou un ellipsoïde de révolution très allongé. Ces rapports diffèrent trop peu des valeurs approchées qu'on obtient en y faisant k infini, pour qu'il soit possible d'en déduire la valeur du coefficient k avec quelque précision.

Au contraire, avec les corps allongés parallèlement aux lignes de force, l'aimantation tend à devenir sensiblement proportionnelle à k et indépendante de la forme du corps.

395. Déplacement des corps dans un champ magnétique. — Attractions et répulsions. — L'énergie potentielle d'une sphère diélectrique infiniment petite (178) dans un champ est

$$W = -\frac{uK}{2}\varphi^2 = -u\frac{3h}{4\pi}\frac{\varphi^2}{2}.$$

Cette expression représente aussi l'énergie d'une sphère magnétique infiniment petite et même d'un élément de volume quelconque d'une substance homogène et isotrope dont le coefficient d'aimantation, positif ou négatif, est très faible ; on a alors $\frac{3h}{4\pi} = k$, et $W = -uk\frac{\varphi^2}{2}$.

Pour un déplacement très petit, la variation d'énergie est

$$dW = -\frac{uk}{2}d(\varphi^2).$$

Si le corps est magnétique, le coefficient k est positif, l'énergie diminue quand le corps se rapproche des points où la valeur absolue de la force est maximum. Un corps magnétique très petit dans un champ variable tend donc à marcher vers les points où la force est maximum. Comme il n'y a pas de maximum absolu de force en dehors des masses agissantes

(180), il en résulte que si ce corps est abandonné à lui-même, il finira par aboutir à la surface des aimants; il est donc *attiré* par les aimants.

Pour les substances diamagnétiques, le coefficient k est négatif. Un petit corps diamagnétique se rapproche des points où la force est minimum; il tend à s'éloigner de plus en plus des centres de force, il est donc *repoussé* par les aimants.

Comme le champ peut renfermer des points où la force est nulle, et qui sont alors des minima absolus pour la valeur de φ^2, on voit qu'il peut y avoir équilibre stable pour un corps diamagnétique dans un champ variable, en dehors des masses agissantes.

Faraday avait déjà énoncé, comme résultat de l'expérience, cette loi *que les corps magnétiques marchent vers les points où la force est maximum et les corps diamagnétiques vers les points où la force est minimum*. C'est à sir W. Thomson que l'on doit la véritable interprétation du phénomène.

Dans un champ uniforme, l'énergie d'un petit corps isotrope, magnétique ou diamagnétique, est constante et par conséquent la force nulle.

396. — Pour un corps magnétique anisotrope, l'énergie totale est la somme des énergies qui correspondent aux moments magnétiques $u\varphi k\lambda$, $u\varphi k'\lambda'$, $u\varphi k''\lambda''$, dus aux composantes $\varphi\lambda$, $\varphi\lambda'$, $\varphi\lambda''$ de la force parallèles aux trois axes; on a donc

$$W = -u\frac{\varphi^2}{2}(k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''\lambda''^2).$$

Si le corps est astreint à tourner autour de son centre de gravité, l'équilibre stable correspond au cas où l'énergie est minimum, c'est-à-dire au cas où l'expression comprise entre parenthèses est maximum.

Comme il est déjà nécessaire, pour l'équilibre, que deux des cosinus λ, λ' et λ'' soient nuls, ce maximum aura lieu quand la parenthèse se réduira au terme qui correspond au plus grand des coefficients k, k' et k''. Alors l'axe de plus grande aimantation est parallèle à la force du champ.

Si le corps passe d'une position pour laquelle la force et la

direction du champ sont définies par φ_1, λ_1, λ'_1, λ''_1, à une autre position pour laquelle les valeurs des mêmes quantités sont φ_2, λ_2, λ'_2, λ''_2, la variation d'énergie est

$$W_2 - W_1 = -\frac{\mu}{2}\left\{\varphi_2^2(k\lambda_2^2 + k'\lambda_2'^2 + k''\lambda_2''^2) - \varphi_1^2(k\lambda_1^2 + k'\lambda_1'^2 + k''\lambda_1''^2)\right\}.$$

Cette variation est négative, et le déplacement tend à se faire sous la seule influence des forces magnétiques, lorsque la parenthèse est positive.

Si le corps est assujetti à se déplacer parallèlement à lui-même, l'expression précédente devient

$$W_2 - W_1 = -\frac{\mu}{2}(k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''\lambda''^2)(\varphi_2^2 - \varphi_1^2).$$

On voit que le corps tendra, dans tous les cas, à marcher vers les points où la force est maximum. Cette tendance sera d'ailleurs d'autant plus marquée que le second facteur sera plus grand; elle sera maximum quand l'axe principal de plus grande aimantation sera parallèle au champ, minimum quand elle lui sera perpendiculaire.

397. — Si le corps est diamagnétique, les valeurs de k, k', k'' sont négatives et les conclusions opposées à celles qui précèdent. L'équilibre stable dans un champ uniforme a lieu quand l'axe de plus faible aimantation est parallèle à la direction du champ. Dans un champ variable le corps tend à se déplacer dans le sens où la force décroît, et l'action est maximum quand l'axe de plus faible aimantation est parallèle aux lignes de force. Ces deux causes peuvent agir en sens contraires et donner des effets différents suivant que l'une ou l'autre sera prédominante. C'est ainsi qu'on peut expliquer beaucoup d'expériences qui ont paru pendant longtemps contradictoires ou paradoxales.

Les résultats seraient encore plus complexes pour les corps dont les coefficients principaux d'aimantation ne seraient pas tous trois de même signe.

De pareils corps seraient magnétiques dans certaines condi-

tions et diamagnétiques dans d'autres. On n'en connaît aucun exemple; mais le cas pourrait être réalisé artificiellement en plaçant, dans un champ non uniforme, une sphère magnétique cristallisée entourée d'un fluide également magnétique et dont le coefficient d'aimantation serait intermédiaire entre les coefficients de plus grande et de plus petite aimantation de la sphère. La sphère serait magnétique suivant l'axe de plus grande aimantation, diamagnétique suivant l'axe de plus faible aimantation; elle se dirigerait dans le sens des forces croissantes quand le premier de ces axes serait parallèle au champ, dans le sens inverse quand ce serait le second. Ces actions sont d'ailleurs si faibles qu'il y aurait sans doute de grandes difficultés à les mettre en évidence.

398. Équilibre des masses allongées dans un champ uniforme. — Nous avons vu, en électrostatique (185), qu'un cylindre allongé conducteur placé dans un champ uniforme est en équilibre lorsque l'axe du cylindre est perpendiculaire ou parallèle à la force du champ, que cet équilibre est instable dans le premier cas et stable dans le second.

Il doit en être de même pour une masse allongée de fer doux placée dans un champ magnétique uniforme, puisque l'aimantation d'une sphère de fer doux est une fraction très voisine de l'unité, $h = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}$, de l'électrisation que prendrait cette sphère dans un champ électrique où les forces auraient les mêmes valeurs absolues.

On sait en effet, depuis Gilbert, qu'une aiguille de fer doux mobile autour d'un axe vertical se met en équilibre dans le méridien magnétique, et que, si elle était mobile autour de son centre de gravité, elle prendrait la direction de l'aiguille d'inclinaison.

Toutefois il ne suffit pas, pour expliquer cette expérience, de dire que le fer s'aimante en chaque point parallèlement à la force du champ, car alors l'aiguille devrait être en équilibre dans toutes les positions; il faut donc que l'aimantation de la masse ne soit pas uniforme.

Le couple qui agit sur l'aiguille, quand elle est oblique à la force du champ, tient à ce que les réactions des différentes

particules ont modifié l'aimantation; la direction parallèle au champ est celle qui, par suite de ces réactions, correspond au maximum d'aimantation.

399. — Considérons, en effet, une série de balles de fer doux B, B′, B″,... fixées sur un axe non magnétique et placées dans un champ uniforme; soit α l'angle de l'axe avec la direction du champ.

Si ces balles sont assez éloignées pour ne pas réagir les unes sur les autres, l'aimantation de chacune d'elles est parallèle au champ et l'action résultante est nulle. Mais, si la distance des balles n'est pas très grande par rapport à leurs dimensions, il est clair que l'aimantation de chacune d'elles est augmentée par leurs réactions et qu'elle a lieu suivant des directions qui font avec l'axe des angles ω, ω',... plus petits que α et variables d'une sphère à l'autre. Chaque sphère n'est plus en équilibre, elle est soumise à l'action d'un couple, et l'ensemble de ces couples tend à ramener l'axe commun dans la direction du champ. Dans cette position l'aimantation est maximum.

Au contraire, si l'axe est perpendiculaire à la direction du champ, les actions réciproques tendent à diminuer l'aimantation de chacune des balles isolées; il y a équilibre instable et l'aimantation de l'ensemble des sphères est minimum.

Ainsi, l'existence d'une position d'équilibre stable pour une aiguille magnétique dans un champ uniforme implique l'existence de réactions entre les différents éléments magnétiques qui la composent; il est donc en contradiction avec l'hypothèse de Poisson sur la constitution des corps magnétiques laquelle admet que ces réactions n'existent pas.

400. — Les conséquences seraient à peu près les mêmes pour l'équilibre d'un corps diamagnétique, quoique les réactions agissent dans un sens opposé.

En effet, l'aimantation induite est alors de sens contraire à la force magnétisante. Une série de balles B, B′, B″,..., disposées sur une droite perpendiculaire au champ, s'aimantent dans une direction opposée à celle du champ; les réactions augmentent donc la force magnétisante sur chacune des balles. Cette direction correspond dès lors à un maximum d'aimantation et à un état d'équilibre.

Supposons maintenant que la ligne des balles fasse un angle α avec la direction du champ; comme le sens de l'aimantation est inverse et que chaque pôle tend à développer un pôle de même nom dans la partie la plus voisine d'une autre balle, les réactions diminuent la force magnétisante et en modifient la direction; l'effet est d'ailleurs d'autant plus marqué que l'angle α est plus petit. Les couples qui agissent sur les sphères tendent encore à faire prendre à l'axe une direction parallèle au champ. L'aimantation est alors minimum.

Ainsi une aiguille diamagnétique doit aussi, dans un champ uniforme, prendre une direction parallèle à celle du champ pour être en équilibre stable.

Toutefois, le coefficient d'aimantation pour les corps diamagnétiques est tellement faible, que les réactions des particules sont négligeables et que leur effet doit échapper à tout moyen d'observation.

En fait, une aiguille diamagnétique, pourvu qu'elle ne soit pas cristallisée, est en équilibre indifférent dans un champ magnétique uniforme; dans toutes les expériences où l'on constate des phénomènes de direction, l'effet est dû aux propriétés *magnéto-cristallines* (**397**) du corps en observation.

401. Équilibre des corps dans un champ variable. — Dans un champ variable les phénomènes sont plus complexes.

Les corps diamagnétiques obéissent simplement à la loi de Faraday, c'est-à-dire que chacun des éléments de volume tend à se déplacer vers les points où la force est minimum, et le mouvement de l'ensemble du système est déterminé par cette tendance de chaque élément.

Considérons, par exemple, le champ produit par les pôles opposés A et A′ de deux aimants identiques, ou par les deux pôles d'un aimant en fer à cheval, ou, plus simplement, le champ de deux masses égales et de signes contraires (fig. 34).

Au centre de figure O, à égale distance des deux aimants, la force a une valeur minimum par rapport à la ligne diamétrale AA′, et une valeur maximum par rapport à une direction Oy normale à la première. Une petite sphère magnétique isotrope, mobile seulement le long de la droite Oy, marche vers le point O où elle est en équilibre stable; une sphère

diamagnétique dans les mêmes conditions serait en équilibre instable au point O, et tendrait à s'en écarter indéfiniment. Si même cette sphère était absolument libre et située sur la droite Oy à une petite distance du point O, elle s'éloignerait de ce point en suivant la ligne Oy, c'est-à-dire *normalement aux lignes de force*, parce que c'est la direction suivant laquelle la force varie le plus rapidement.

402. — Une aiguille allongée magnétique, mobile autour du point O, se dispose parallèlement à la ligne des pôles AA', en équilibre stable, chacun des éléments de volume se portant vers les points où la force est maximum.

Pour une aiguille diamagnétique, au contraire, la position d'équilibre stable correspond à la direction perpendiculaire à la ligne des pôles.

Les aiguilles se mettent donc *parallèlement* ou *transversalement* à la ligne de deux pôles de noms contraires, suivant que le coefficient d'aimantation est positif ou négatif. De là les noms de *paramagnétiques* ou de *diamagnétiques* donnés par Faraday aux corps qui appartiennent à la première ou à la seconde classe.

403. — Nous venons de voir que, même dans un champ uniforme, une aiguille magnétique se place parallèlement aux lignes de force, et d'autre part, les différents éléments tendent à marcher vers les points où la force est maximum.

Lorsque ces deux espèces d'actions sont concordantes comme dans le cas qui précède, la position d'équilibre est facile à déterminer; mais il peut arriver que la tendance de chacun des éléments à marcher vers les maxima de force ait pour résultat d'amener le système dans une direction qui ne soit pas parallèle aux lignes de force. Alors la position d'équilibre dépend des conditions de l'expérience. Imaginons, par exemple, une série d'aiguilles de fer doux identiques disposées normalement et à égales distances les unes des autres sur une tige non magnétique, et plaçons ce système entre les pôles opposés des deux aimants. Si les aiguilles sont très écartées, chacune d'elles tend à se mettre parallèlement aux lignes de force et le système entier sera en équilibre perpendiculairement à la ligne des pôles. Si, au contraire, on rac-

courcit les aiguilles de plus en plus, ou si on les multiplie de manière à les rapprocher presque au contact, il arrivera un moment où la tendance de chacune d'elles à se porter vers les points de force maximum deviendra prédominante et le système entier se placera cette fois parallèlement aux lignes de force, c'est-à-dire suivant la ligne des pôles.

On conçoit que tous les cas intermédiaires puissent se présenter et même que, pour un système magnétique donné, la direction d'équilibre parallèle ou transverse dépende de la loi de variation du champ dans lequel il est placé.

404. Oscillations d'une aiguille isotrope infiniment petite. — Le problème est identique à celui qui a été traité précédemment (**183**, **184**) pour les diélectriques.

En particulier, si le champ est symétrique par rapport au centre de l'aiguille, la durée des oscillations est donnée par la formule

$$t^2 = \pi^2 \frac{\rho}{K} \frac{1}{A+B},$$

et est indépendante de la longueur de l'aiguille. Ce dernier fait avait été trouvé expérimentalement par Matteucci pour des aiguilles de bismuth non cristallisées; l'explication en a été donnée par sir W. Thomson.

Dans le cas actuel, le coefficient

$$K = \frac{k}{1 + \frac{4}{3}\pi k}$$

se réduit sensiblement à une constante pour les grandes valeurs de k et devient égal à k pour les petites. La méthode des oscillations dans un champ symétrique ne pourra donc être employée pour déterminer le coefficient d'aimantation de corps très magnétiques comme le fer; au contraire, elle conviendra très bien au cas de corps faiblement magnétiques ou de corps diamagnétiques.

Si le champ varie d'une manière quelconque, la méthode des oscillations, même pour les corps à coefficient très faible,

On en déduit, pour le moment magnétique résultant,

$$M^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 = u^2\varphi^2(k^2\lambda^2 + k'^2\lambda'^2 + k''^2\lambda''^2) = u^2\varphi^2 H^2.$$

L'axe magnétique résultant de la sphère fait avec les axes de coordonnées des angles dont les cosinus $\alpha, \alpha', \alpha''$ sont donnés par les équations

$$\frac{\alpha}{k\lambda} = \frac{\alpha'}{k'\lambda'} = \frac{\alpha''}{k''\lambda''} = \frac{1}{H},$$

et cet axe fait avec la direction du champ un angle θ défini par la relation

$$\cos\theta = \alpha\lambda + \alpha'\lambda' + \alpha''\lambda'' = \frac{k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''\lambda''^2}{H}.$$

En désignant par M' le moment du couple produit par l'action du champ sur la sphère, on a

$$M' = \varphi M \sin\theta,$$

ou, en remplaçant M et θ par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} M'^2 &= \varphi^2 M^2(1 - \cos^2\theta) = u^2\varphi^4[H^2 - (k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''^2\lambda''^2)] \\ &= u^2\varphi^4[k^2\lambda^2 + k'^2\lambda'^2 + k''^2\lambda''^2 - (k\lambda^2 + k'\lambda'^2 + k''\lambda''^2)(\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2)] \\ &= u^2\varphi^4 \} [\lambda'\lambda''(k' - k'')]^2 + [\lambda''\lambda(k'' - k)]^2 + [\lambda\lambda'(k - k')]^2 \{. \end{aligned}$$

La sphère ne peut être en équilibre qui si le couple produit par l'action du champ est nul ; il faut donc que les trois carrés compris dans la parenthèse soient nuls séparément. Comme les coefficients k, k', k'' sont différents, par hypothèse, il faut que deux des cosinus $\lambda, \lambda', \lambda''$ soient égaux à zéro et, par suite, que l'un des axes principaux d'aimantation coïncide avec la direction du champ.

Le calcul qui précède convient également à un corps homogène de forme quelconque situé dans un champ uniforme, puisque le moment magnétique par rapport à l'un des axes

principaux est simplement proportionnel au volume du corps et à la composante de la force du champ.

Si le champ est variable, on supposera infiniment petit le volume considéré de la substance ; le moment du couple qui tend à le faire tourner autour de son centre de gravité aura encore la même expression en fonction de l'intensité du champ au point occupé par l'élément de volume.

393. Détermination expérimentale des coefficients d'aimantation. — Lorsqu'un cylindre est aimanté d'une manière uniforme parallèlement à l'axe, l'action qu'il exerce sur un point intérieur ne dépend que des deux couches terminales. Si le cylindre est très allongé, cette action est négligeable pour tous les points dont la distance à l'une des extrémités reste très grande par rapport au diamètre : la force résultante sera donc produite uniquement par les masses extérieures. Si le champ extérieur est uniforme et parallèle à l'axe, l'aimantation dans la plus grande partie du cylindre sera uniforme et proportionnelle à l'intensité du champ. Dans le voisinage des extrémités seulement, l'aimantation induite sera un peu modifiée : la couche superficielle, au lieu d'être uniforme et limitée à la surface terminale, aura une distribution plus complexe et se répandra en partie sur les surfaces latérales.

D'après cela, le coefficient d'aimantation d'une substance isotrope peut être défini comme le quotient par la force du champ de l'intensité de l'aimantation qu'acquiert un cylindre infiniment mince de la substance, placé parallèlement à la force dans un champ uniforme, ou l'aimantation qu'il prend dans un champ égal à l'unité.

De même, le coefficient d'aimantation d'un milieu anisotrope dans une direction déterminée est l'aimantation longitudinale que prendrait un cylindre infiniment mince parallèle à cette direction dans un champ égal à l'unité.

394. — On voit aussi que, pour déterminer le coefficient d'aimantation de corps très magnétiques comme le fer, on ne peut se servir de l'action extérieure produite par des sphères ou des corps allongés dans une direction perpendiculaire au champ. En effet, le rapport de l'aimantation à la force est

l'aimantation résiduelle. Ce problème n'a été résolu théoriquement que dans un très petit nombre de cas.

407. Induction de l'aimant sur lui-même. — Force démagnétisante. — Le magnétisme définitif d'un aimant doit être considéré comme formé de deux parties, l'une due aux masses magnétiques maintenues fixes par la force coercitive, et qu'on peut appeler le *magnétisme rigide*, l'autre résultant de l'induction de la première sur le corps magnétique, et qui constitue le *magnétisme induit.*

L'action intérieure du magnétisme induit est évidemment de sens contraire à la force qui le produit; il en résulte que l'induction d'un aimant sur lui-même tend toujours à diminuer l'aimantation et agit comme *force démagnétisante.*

Le magnétisme *apparent*, celui dont nous observons les effets, résulte de la superposition de ces deux magnétismes. Aussi la détermination de l'intensité et de la distribution du magnétisme apparent présentera-t-elle, en général, de grandes difficultés.

Le problème se simplifie quand la force démagnétisante est en chaque point proportionnelle au magnétisme rigide qui existe en ce point; la loi de la distribution est alors la même que si l'effet secondaire d'induction n'existait pas.

En particulier, dans le cas où le magnétisme rigide est uniforme, le magnétisme apparent sera lui-même uniforme, si l'action inductrice secondaire est constante dans l'intérieur de l'aimant.

Cette condition est réalisée, comme on l'a vu plus haut, pour une sphère aimantée uniformément; elle l'est également pour un ellipsoïde ayant une aimantation uniforme parallèle à l'un des axes, et pour un cylindre circulaire droit indéfini, aimanté perpendiculairement à l'axe.

408. — Considérons d'abord une sphère. Désignons par I l'aimantation rigide, par I′ l'aimantation induite et par I_1 l'aimantation apparente; la force démagnétisante est alors (**355**) égale à $\frac{4}{3}\pi I_1$, et l'on a

$$I' = kF_1 = k\frac{4}{3}\pi I_1 = k\frac{4}{3}\pi(I - I').$$

On en déduit

$$(1) \qquad I' = I \frac{1}{1 + \frac{3}{4\pi k}} = I_1 \frac{4}{3}\pi k.$$

Pour un ellipsoïde aimanté parallèlement à l'un des axes, l'action démagnétisante a pour valeur $I_1 L$, $I_1 M$ ou $I_1 N$, suivant l'axe dont il s'agit (**356**). Elle est $4\pi I_1$ ou $\pi^2\sqrt{1-e^2}\, I_1$ pour un disque, suivant qu'il est aimanté transversalement ou parallèlement à un diamètre (**357**). Pour un ellipsoïde de révolution allongé, elle est $2\pi I_1$ si l'aimantation est transversale, et $4\pi I_1 \frac{b^2}{a^2}\left(l.\frac{2a}{b} - 1\right)$ si l'aimantation est longitudinale (**357**).

Cette dernière expression tend vers zéro quand le rapport $\frac{b}{a}$ diminue de plus en plus. La force démagnétisante serait encore plus petite pour un long cylindre (**373**).

La forme de lames minces ou de cylindres très allongés est donc celle qui convient le mieux pour obtenir des aimants permanents, puisque la force démagnétisante est alors la plus faible possible. Ce sont, en effet, les formes qui ont été consacrées par la pratique. L'expérience montre, en outre, que l'influence de la trempe est alors beaucoup moindre que dans le cas des aimants gros et courts. Coulomb avait déjà constaté que la trempe n'a qu'une influence peu appréciable sur la rigidité magnétique d'un fil d'acier.

409. Cas particuliers d'aimantation. — *Sphère.* — Il résulte de la discussion qui précède qu'une sphère d'acier pleine, homogène et isotrope, placée dans un champ magnétique uniforme, prendra une aimantation temporaire uniforme et gardera ensuite une aimantation résiduelle uniforme.

L'aimantation temporaire aura une expression de la forme

$$(2) \qquad I = \frac{k}{1 + \frac{4}{3}\pi k} F,$$

dans laquelle le coefficient k doit être regardé, non plus

comme une quantité constante, mais comme une fonction de l'intensité F du champ réel : la fraction par laquelle on doit multiplier la force F pour avoir l'aimantation I, tend, en effet, à devenir en raison inverse de F, c'est-à-dire égale à $\frac{I_0}{F}$, à mesure que F augmente, puisque l'aimantation tend vers un maximum I_0.

De même, l'aimantation résiduelle est une fraction de l'aimantation temporaire, fraction variable et qui tend vers une valeur limite $\frac{1}{m}$, puisque l'aimantation résiduelle a un maximum ; celle-ci est alors une fraction $\frac{I_0}{m}$ de l'aimantation temporaire maximum.

Dans tous les cas, la loi de la distribution est la même : la densité en chaque point est égale à la projection normale de l'aimantation, c'est-à-dire proportionnelle à l'abscisse du point comptée à partir du centre sur le diamètre parallèle à l'aimantation. La densité linéaire comptée suivant le même axe est également proportionnelle à l'abscisse. Le moment de sphère est uI_1, la masse totale de chacune des couches $\frac{3}{4}\frac{uI_1}{a}$, la distance des pôles $\frac{4a}{3}$, et chaque pôle est au $\frac{2}{3}$ du rayon à partir du centre.

410. *Ellipsoïde.* — Il en est de même pour un ellipsoïde homogène et isotrope dont un des axes coïncidait pendant l'aimantation avec la direction du champ uniforme ; il faut seulement remplacer le facteur $\frac{4}{3}\pi$ par un coefficient L qui dépend de la forme de l'ellipsoïde (**357**).

L'aimantation maximum I_0 et la fraction $\frac{1}{m}$ qui détermine le maximum d'aimantation résiduelle ont des valeurs qui sont liées à celles qui correspondent à la sphère par des relations qui dépendent de la forme de l'ellipsoïde.

La loi de distribution est encore connue et les pôles sont à

une distance du centre égale au $\frac{2}{3}$ du demi-axe parallèle à l'aimantation.

On pourra, de même, obtenir un aimant uniforme avec un disque circulaire aimanté perpendiculairement à un plan ou parallèlement à un diamètre (**357**).

411. *Tore.* — Un cas simple réalisable expérimentalement est celui d'un corps limité par une surface canal fermée, un tore par exemple, dans laquelle l'aimantation serait en chaque point parallèle à l'axe. L'aimant peut alors être considéré comme formé de solénoïdes simples, parallèles à l'axe, et fermés sur eux-mêmes (**371**), l'action extérieure du système est toujours rigoureusement nulle.

412. *Cylindre.* — On peut encore joindre aux exemples qui précèdent et qui correspondent à des volumes finis et réalisables en toute rigueur, celui d'un cylindre circulaire indéfini, homogène et isotrope, situé dans un champ uniforme perpendiculaire à l'axe; l'aimantation est alors représentée par l'expression

$$I = \frac{k}{1 + 2\pi k} F.$$

Les cas que nous venons d'examiner paraissent être les seuls où l'on puisse déterminer théoriquement la distribution du magnétisme, au moins lorsque le coefficient k n'est pas indépendant de la force magnétisante.

413. Aimants quelconques. — Méthodes expérimentales. — Pour un corps quelconque le problème de l'aimantation ne peut être abordé que d'une manière expérimentale par l'étude des actions extérieures; mais nous avons déjà fait remarquer que la connaissance du champ extérieur d'un aimant ne peut rien apprendre sur la distribution intérieure du magnétisme, elle permettrait seulement de déterminer la distribution de la couche fictive équivalente à l'aimantation réelle.

Nous rappellerons les principales méthodes expérimentales employées pour en préciser la signification théorique.

414. *Oscillations.* — Cette méthode, employée par Coulomb, consiste à faire osciller une très petite aiguille horizontale de-

vant les différents points du barreau placé verticalement dans le plan méridien de l'aiguille. En désignant par n et N les nombres d'oscillations faites par l'aiguille sous l'influence seule de la terre et sous l'action combinée de la terre et du barreau, l'action du barreau sur l'aiguille dont on suppose le magnétisme invariable est proportionnelle à la différence $N^2 - n^2$ des carrés des deux nombres. On mesure ainsi la composante normale de la force magnétique au point considéré. Coulomb admettait que cette composante normale est proportionnelle à la densité, de la couche fictive superficielle, au point le plus rapproché de l'aiguille, sauf au voisinage de l'extrémité; dans ce cas il déterminait la densité soit par un procédé graphique, soit en doublant la valeur obtenue par les oscillations de l'aiguille. On ne peut méconnaître ce qu'il y a d'arbitraire dans ce mode de correction; il est d'ailleurs tout à fait inexact, comme on le verra plus loin (**419**), que la force normale en un point soit proportionnelle à la densité de la couche fictive correspondante, et qu'elle puisse donner directement la distribution du magnétisme.

415. *Balance de torsion.* — Une seconde méthode, également due à Coulomb, consiste à mesurer la répulsion exercée par chaque point de l'aimant, à une distance constante et très petite, sur le pôle d'une longue aiguille mobile dans un plan perpendiculaire à l'axe du barreau. Si on considère comme invariable le pôle de l'aiguille, la torsion qu'il faut donner au fil de suspension pour maintenir l'aiguille dans la position voulue, mesure encore avec une certaine approximation la composante normale de la force magnétique.

416. *Emploi du fer doux.* — Dans les deux cas précédents, on admet que le magnétisme de l'aimant auxiliaire est invariable, de sorte que l'action qu'il subit est simplement proportionnelle à l'intensité du champ. Si l'aiguille oscillante est en fer doux et que l'aimantation de cette aiguille soit proportionnelle à l'intensité du champ, l'action qu'elle subira sera proportionnelle au carré de la composante normale.

De même, on peut placer un morceau de fer doux (*clou d'épreuve* de M. Jamin) sur les différents points de l'aimant et déterminer la force nécessaire pour l'en détacher; cette

force d'arrachement est encore, avec les mêmes restrictions, proportionnelle au carré de la composante normale.

Toutefois, dans ces deux méthodes, on ne tient compte ni de la variation du coefficient k avec l'intensité de la force magnétique, ni des modifications apportées par la présence du fer doux dans l'état magnétique du barreau précisément sur la région que l'on explore. Les résultats fournis par l'emploi du fer doux ne paraissent donc pas aussi bien définis que ceux qu'on obtient par les aimants.

417. *Mesure du flux par les courants d'induction.* — Cette méthode est la seule qui donne des résultats rigoureux; on en trouvera plus loin la théorie. Il suffira ici de dire qu'elle permet, au moyen des courants induits, de déterminer le flux de force ou le flux d'induction magnétique qui traverse un circuit fermé.

Si on entoure le barreau en un point par un anneau formé d'une ou plusieurs spires et relié à un galvanomètre, et que par un procédé quelconque on supprime brusquement l'aimantation, le courant momentané produit dans l'anneau mesure le flux total d'induction qui traversait le plan limité par l'anneau au point considéré; si l'anneau enserre étroitement le barreau, le flux d'induction qui traverse l'anneau est celui qui existe dans la section même du barreau.

L'anneau étant placé au même point, on le fait glisser suivant l'axe du barreau de manière à l'emporter à une distance qu'on puisse considérer comme infinie; le courant mesure cette fois le flux total de force émané de l'aimant à partir du point de départ.

L'expérience montre, comme c'était évident d'ailleurs d'après le théorème de la conservation du flux d'induction, que le courant est le même que dans le cas précédent.

En mesurant de l'une ou de l'autre manière le flux correspondant aux différents points, on peut construire une courbe qui représentera l'état magnétique du barreau. La courbe a une ordonnée maximum qui correspond à la ligne neutre; elle s'abaisse de part et d'autre et devient asymptote à l'axe du barreau supposé prolongé indéfiniment. On peut l'appeler avec Gaugain *courbe de désaimantation*.

Si, l'anneau étant placé au point dont l'abscisse est x, on le fait glisser d'une quantité dx, le courant mesure le flux extérieur correspondant à cette longueur dx, ou, ce qui revient au même, la variation du flux intérieur d'induction. En déplaçant successivement l'anneau de quantités égales, on pourra construire la courbe dont les ordonnées représentent le flux extérieur, et par suite la composante normale aux différents points. Les ordonnées de cette courbe sont les dérivées des ordonnées de la courbe de désaimantation.

Cette méthode fournit donc, comme les précédentes, mais d'une manière exacte, les valeurs de la composante normale en chaque point du barreau.

418. Distribution de la couche fictive. — La couche fictive n'est point une couche d'équilibre, mais on sait (**39**) que sa densité en chaque point satisfait à la relation

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(F_n - F'_n),$$

dans laquelle F_n et F'_n désignent, pour deux points infiniment voisins pris de part et d'autre de la surface, le premier à l'extérieur et le second à l'intérieur, les composantes normales des actions exercées par les masses extérieures et par la couche. Les méthodes qui précèdent donnent la composante F_n, mais la composante F'_n est en général inconnue; par suite, elles ne permettront de déterminer la densité de la couche fictive que dans certains cas particuliers.

Il peut arriver, en effet, que la couche fictive puisse remplacer les masses magnétiques qui existent réellement dans l'aimant, non seulement pour les points extérieurs, mais pour les points intérieurs; c'est ce qui a lieu dans les phénomènes d'induction magnétique, lorsque le coefficient k est constant. Alors il y a un rapport constant μ entre les composantes normales extérieure et intérieure, et la densité a pour expression

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\mu - 1}{\mu} F_n = \frac{k}{1 + 4\pi k} F_n.$$

Dans ce cas la distribution est entièrement connue quand on

connaît la composante normale extérieure en chaque point. Il n'en est plus de même si le coefficient k est variable et, à plus forte raison, s'il existe du magnétisme rigide.

Les méthodes ordinaires ne donnent donc pas directement la distribution de la couche fictive dans un barreau aimanté ; il est inexact, en particulier, de considérer l'abscisse du centre de gravité de la courbe des composantes normales comme donnant la position du pôle. Il suffit, pour s'en convaincre, d'examiner le cas d'un cylindre aimanté uniformément suivant une direction parallèle à l'axe. Nous avons vu (**373**) que son action peut être représentée par celle de deux couches, l'une positive, l'autre négative, distribuées d'une manière uniforme sur chacune des bases. Il est facile de voir que pour la surface latérale le flux de force n'est pas nul, bien que la densité soit nulle. Le centre de gravité de la courbe qui représente le flux qui traverse la surface latérale tombe à l'intérieur de l'aimant, tandis que le pôle se trouve rigoureusement situé sur la surface terminale.

Remarquons que, si les composantes normales ne donnent pas la distribution, elles permettent, en vertu du théorème de Green, de calculer la masse totale du magnétisme. Pour l'aimant tout entier, cette masse est évidemment nulle ; mais le flux total de force considéré d'un côté ou de l'autre de la ligne neutre est égal au produit de 4π par la masse de la couche fictive correspondant à ce côté. Cette masse totale est représentée par l'aire de la courbe qu'on obtiendrait en prenant comme ordonnées les valeurs trouvées pour la composante normale en tous les points de l'axe de l'aimant, supposé prolongé indéfiniment, ou, plus simplement, par l'ordonnée maximum de la courbe de désaimantation.

419. Aimants cylindriques. — Coulomb a déterminé par expérience, et à l'aide des méthodes indiquées plus haut, ce qu'il appelle la distribution du magnétisme dans des aiguilles cylindriques.

Il a constaté d'abord que pour les aimants *courts*, c'est-à-dire ceux dont la longueur est plus petite que 50 fois le diamètre, la force normale en chaque point (qu'il confondait avec la densité) est proportionnelle à la distance au point milieu.

La densité linéaire serait donc la même que pour une sphère ou un ellipsoïde aimanté uniformément.

La courbe de distribution est alors figurée par une droite OB (fig. 86) faisant un certain angle α avec l'axe OA du barreau. Une droite OB' formant le prolongement de la première

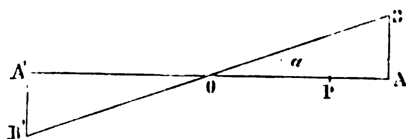


Fig. 86

figurerait le magnétisme négatif sur l'autre moitié du barreau. Le centre de gravité de la surface se projette, comme pour une sphère, au tiers de la demi-longueur du barreau à partir des extrémités.

Cette loi doit représenter la distribution réelle du magnétisme d'une manière assez approchée, car Coulomb a vérifié que, toutes choses égales, le moment magnétique des barreaux courts est proportionnel au cube de la longueur.

Si le barreau est *long*, c'est-à-dire si la longueur L dépasse 50 fois le diamètre d, le magnétisme est insensible sur une certaine longueur de part et d'autre du centre et peut être encore représenté par un triangle CAA' (fig. 87) dont la base occupe une longueur égale à 25 fois le diamètre. L'angle α de la droite figurative des densités est constant pour des barreaux qui ne diffèrent que par la longueur. La quantité de magnétisme est alors constante et la même que dans un aimant limite, pour lequel on aurait $L=50d$; cette quantité peut donc être représentée par $a\,(50d)^2$ et le moment par $a\left(L-\frac{50}{3}d\right)(50d)^2$.

Coulomb ne considère toutefois ces résultats que comme une première approximation. Il a constaté que, si l'on prend, à partir de l'extrémité A d'un aimant, des points équidistants, les tangentes successives aux points correspondants de la courbe figurative font entre elles des angles égaux. La

courbe qui satisfait à cette condition est donnée par l'équation $e^{-y} = \cos \beta x$, qui pour les petites valeurs de x se confond sensiblement avec un arc de parabole CB (fig. 87) tangente à l'axe en un point C a une distance l de l'extrémité ; la quantité

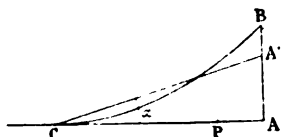


Fig. 87

de magnétisme est alors proportionnelle à l^3, soit bl^3, et le pôle est situé à une distance de l'extrémité égale à $\frac{l}{4}$. Le moment magnétique aurait pour valeur $\left(L - \frac{l}{2}\right) bl^3$.

On voit que le moment magnétique pour un cylindre très long tend à devenir proportionnel à la longueur, comme dans le cas de l'aimantation induite.

420. Formules empiriques. — Ces deux fragments de parabole ne représentent pas la distribution du magnétisme par une fonction continue. Biot a trouvé que l'on satisfait aux expériences de Coulomb d'une manière très exacte par la formule exponentielle

$$(3) \qquad y = a(\mu^x - \mu^{2l-x}),$$

dans laquelle y est le magnétisme en un point situé à une distance x d'une des extrémités, a et μ des constantes.

Biot arrive à cette formule en assimilant l'aimant à une pile de Volta qu'il considère elle-même comme une série de plaques dans lesquelles les électricités des plaques extrêmes A et B *dissimulent* des quantités d'électricité de signes contraires variant en progression géométrique avec le nombre des plaques. En nommant N le nombre total des plaques, l'électricité positive de A dissimule dans la $n^{ième}$ plaque une quantité d'électricité négative exprimée par ax^n, et l'électricité négative de B dissimule dans ce même élément une quantité

d'électricité positive exprimée par $a\alpha^{N-n}$, de sorte que la quantité d'électricité libre dans cet élément est, si on suppose les charges extrêmes égales entre elles,

$$y = a\,(\alpha^n - \alpha^{N-n}).$$

Pour passer de cette formule à la précédente, il suffit de poser $N = 2lp$ et, par suite, $n = xp$, en appelant p le nombre de couples par unité de longueur, et de prendre $\mu = \alpha^p$.

Il paraît difficile de discuter un raisonnement n'ayant pour base que la notion vague de l'électricité dissimulée.

421. — La formule à laquelle nous sommes arrivés (**269**) pour le flux qui s'échappe latéralement d'une pile de Volta plongée dans un milieu médiocrement conducteur est équivalente à celle de Biot. Les conditions pour lesquelles cette formule a été obtenue peuvent être considérées comme s'appliquant à un cylindre magnétique placé dans un champ uniforme parallèle à l'axe, auquel cas le potentiel varie proportionnellement à l'abscisse.

422. — Green, partant d'une conception particulière de la force coercitive, a trouvé que, pour un cylindre circulaire placé dans ces conditions, la densité linéaire, à une distance x comptée à partir du milieu d'un barreau de longueur $2l$ et de rayon a, doit être exprimée par la formule

$$(4) \qquad \lambda = \pi k F q a \, \frac{e^{\frac{q}{a}x} - e^{-\frac{q}{a}x}}{e^{\frac{q}{a}l} + e^{-\frac{q}{a}l}},$$

dans laquelle F représente l'intensité du champ et q une constante donnée par l'équation

$$0{,}231863 - 2\,l.q + 2q = \frac{1}{\pi k q^2}.$$

Green admet que le coefficient d'aimantation k est constant dans toute l'étendue du corps; dans ce cas, la densité linéaire

est proportionnelle à la composante normale. Maxwell donne le tableau suivant des valeurs correspondantes de q et de k.

k	q	k	q
∞	0,00	11,80	0,07
336,4	0,01	9,13	0,08
62,02	0,02	7,52	0,09
48,41	0,03	6,32	0,10
29,47	0,04	0,143	1,00
20,18	0,05	0,0002	10,00
14,79	0,06	0,0000	∞

Pour des valeurs de k négatives, q devient imaginaire; la formule ne semble donc pas pouvoir s'appliquer aux corps diamagnétiques.

La formule de Green paraît représenter très exactement la distribution du magnétisme temporaire dans le fer doux ainsi que celle du magnétisme permanent dans les barreaux de forme cylindrique. Green a vérifié que la valeur du moment qu'on en déduit pour une aiguille de cette forme,

$$(5) \qquad m = \mathrm{A}a^2\left(2l - \frac{2}{\beta}\frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}\right),$$

s'accorde d'une manière très remarquable avec les déterminations faites par Coulomb sur des aiguilles qui ne différaient que par la longueur. L'accord cesse cependant d'être tout à fait satisfaisant quand la longueur de l'aiguille est inférieure à vingt-cinq fois le diamètre.

L'aire de la courbe qui correspond à la formule de Green a pour expression

$$\mathrm{S} = \pi a^2 \mathrm{F} k\left(1 - \frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}\right);$$

elle représente la valeur totale du flux de force latéral. Pour un cylindre très long, elle se réduit sensiblement à $\pi a^2 \mathrm{F} k$; le flux qui s'échappe par les extrémités peut alors être considéré comme négligeable.

Si on admettait que l'abscisse du centre de gravité de cette aire déterminât la position du pôle, on aurait la distance $2d$ des deux pôles en divisant le moment m par la masse S : on obtiendrait ainsi :

$$\tag{6} \frac{2l - \frac{2}{\beta}\frac{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}}{1 - \frac{2}{e^{\beta l} - e^{-\beta l}}}.$$

422. — Dans le cas d'un aimant permanent on peut arriver à la même formule en assimilant le flux d'induction magnétique qui existe au milieu du barreau à un flux d'électricité qui se propagerait avec déperdition latérale. En reprenant les notations déjà employées (**222**) et considérant les résistances ρ et ρ' comme des constantes, la résistance R en un point quelconque du barreau a pour expression

$$R = \sqrt{\rho\rho'}\frac{Ce^{-2\beta x} + 1}{Ce^{-2\beta x} - 1},$$

en posant

$$C = \frac{R_1 + \sqrt{\rho\rho'}}{R_1 - \sqrt{\rho\rho'}}e^{2\beta l} = C_1 e^{2\beta l}.$$

Désignons par Q le flux d'induction qui traverse une section quelconque du barreau ; le rapport du flux latéral $-dQ$ relatif à la longueur dx au flux intérieur $Q - dQ$ est égal au rapport inverse des résistances, ce qui donne

$$-\frac{dQ}{Q} = \frac{R}{\rho'}dx.$$

En appelant Q_0 la valeur du flux qui traverse la section neutre du barreau située à une distance l de l'extrémité, on en déduit

$$Q = Q_0\frac{C_1 e^{\beta(2l-x)} - e^{-\beta x}}{C_1 e^{\beta l} - e^{-\beta l}}.$$

Ce flux étant parallèle à l'axe au milieu du barreau, la dérivée $\frac{dQ}{dx}$ doit être nulle pour $x = l$; il en résulte

$$C_1 = e^{-2\beta l},$$

et, par suite,

$$Q = Q_0 \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}.$$

Le flux latéral relatif à l'unité de longueur est $-\frac{dQ}{dx}$; ce flux est égal au produit de la composante normale F_n par la surface correspondante $2\pi a$.

On a donc

(7) $$-\frac{dQ}{dx} = 2\pi a F_n = Q_0 \beta \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}.$$

424. — Cette formule devient identique à celle de Green si l'on pose

$$\beta = \frac{q}{a},$$

et

$$Q_0 \beta = \pi k F q a,$$

d'où l'on déduit

(8) $$Q_0 = k F \pi a^2.$$

Comme on a $\beta = \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}$, et que la résistance ρ est évidemment en raison inverse de a^2, on en conclurait que la résistance extérieure ρ' est indépendante du rayon, et que la quantité de magnétisme prise par un barreau dans une condition déterminée serait proportionnelle à sa section et indépendante de sa longueur.

La première de ces conséquences paraît assez difficile à justifier ; nous avons admis, au contraire (**220**), que la résistance ρ' est en raison inverse de la capacité γ et, par suite, en raison inverse du rayon.

On serait plutôt conduit à poser

$$\beta=\sqrt{\frac{\varrho}{\rho}}=c\sqrt{\frac{2}{a}}.$$

Dans cette hypothèse, la formule devient identique à celle qui a été trouvée par M. Jamin comme résultat de ses expériences. En appelant y la *tension* en chaque point, ou la densité, p et s le périmètre et la section du barreau, enfin A et c deux constantes, M. Jamin trouve

$$y=\mathrm{A}c\sqrt{\frac{s}{p}}e^{-c\sqrt{\frac{pl}{s}}}\left(1-e^{-c\sqrt{\frac{2pl}{s}}}\right)\left(e^{-c\sqrt{\frac{px}{s}}}-e^{c\sqrt{\frac{px}{s}}}\right).$$

Si la section du barreau est circulaire et de rayon a, on a $\sqrt{\frac{p}{s}}=\sqrt{\frac{2}{a}}$ et, en posant $c\sqrt{2}=\mathrm{B}$, la formule devient

$$(9)\qquad y=\frac{\mathrm{AB}}{2}\sqrt{a}\,e^{-\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{a}}l}\left(1-e^{-\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{a}}2l}\right)\left(e^{-\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{a}}x}-e^{\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{a}}x}\right).$$

Pour l'identifier avec la formule (7), il suffit de poser

$$\beta=\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{a}}=c\sqrt{\frac{2}{a}},$$

$$\frac{\mathrm{Q}_0\beta}{e^{\beta l}+e^{-\beta l}}=\frac{\mathrm{AB}}{2}\sqrt{a}\,e^{-\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{a}}l}\left(1-e^{-\frac{\mathrm{B}}{\sqrt{a}}2l}\right);$$

on en déduit

$$(10)\qquad \mathrm{Q}_0=\frac{\mathrm{A}a}{2}\left(1-e^{-4\beta l}\right),$$

ou, pour les barreaux un peu longs,

$$\mathrm{Q}_0=\frac{\mathrm{A}a}{2}.$$

Il résulte de ces expressions, que la quantité de magnétisme d'un barreau serait proportionnelle, non plus à sa section, mais à son périmètre, comme si le flux d'induction qui s'établit dans la section moyenne d'un aimant permanent était limité à une couche superficielle dont l'épaisseur, d'ailleurs très petite, dépendrait de la nature du barreau et des procédés employés pour l'aimanter.

425. Hypothèses sur la constitution des aimants. — D'après la théorie de Poisson, l'aimantation d'un milieu serait produite par la séparation des fluides magnétiques dans l'intérieur de chaque particule, et, comme aucune limite n'est assignée à la quantité de fluide neutre qui peut exister dans un volume déterminé, l'aimantation pourrait elle-même croître sans limites.

Nous verrons plus loin comment Ampère, partant des propriétés magnétiques des courants électriques, a été conduit à admettre que chaque particule d'un corps magnétique est entourée à l'état naturel par un courant électrique infiniment petit et constitue un aimant élémentaire. Dans un corps magnétique soustrait à toute force extérieure, ces aimants élémentaires ne sont soumis qu'à leurs actions réciproques et sont orientés indifféremment dans toutes les directions. Si le corps est soumis à l'action d'un champ magnétique, les axes des différentes particules aimantées tendent à prendre en chaque point la direction du champ, et l'aimantation qui en résulte pour le milieu est d'autant plus grande que ces particules ont été plus déviées de leur direction primitive. S'il arrivait que les axes de toutes les particules fussent parallèles entre eux, l'aimantation du milieu atteindrait une valeur maximum.

Telle est la conséquence que W. Weber a déduite de la théorie d'Ampère, et toutes les expériences semblent confirmer, en effet, qu'il y a une limite a l'aimantation.

426. Théorie de Weber. — Admettons, avec Weber, que chaque unité de volume renferme n molécules magnétiques et que le moment de chacune d'elles soit égal à m. Si toutes ces molécules étaient parallèles, le moment magnétique de l'unité de volume serait $M = nm$, et l'aimantation du milieu serait maximum.

Lorsque le milieu est à l'état neutre, les molécules sont orientées indifféremment dans toutes les directions. Pour exprimer cette propriété, menons par le centre d'une sphère un rayon parallèle à chacun des axes des n molécules ; les extrémités de ces rayons seront distribuées sur la sphère d'une manière uniforme.

Le nombre des molécules dont les axes font avec une direction déterminée, que nous prendrons pour axe des x, un angle inférieur à α est $\frac{n}{2}(1-\cos\alpha)$; et le nombre des molécules dont les angles avec l'axe des x sont compris entre α et $\alpha+d\alpha$ est égal à $\frac{n}{2}\sin\alpha\,d\alpha$.

Supposons maintenant ce milieu dans un champ uniforme dont l'intensité X est parallèle à l'axe des x, et considérons l'action qui s'exerce sur une molécule dont l'axe magnétique fait un angle α avec la direction du champ.

Si cette molécule était libre, elle deviendrait parallèle à la force du champ et, toutes les autres molécules éprouvant une rotation analogue, le milieu atteindrait le maximum d'aimantation sous l'influence d'une force extérieure quelconque même infiniment faible.

Comme il n'en est pas ainsi, on doit admettre que chaque molécule est sollicitée à reprendre sa direction primitive par une force antagoniste qui provient, soit de la constitution même du milieu, soit des réactions que les molécules aimantées exercent les unes sur les autres.

L'hypothèse la plus simple est de supposer que cette force antagoniste D est constante et agit dans la direction primitive de l'axe de chaque molécule.

La direction nouvelle de l'axe d'une molécule dans sa position d'équilibre est donnée alors par celle de la résultante des forces D et X.

427. — Pour avoir la direction de la molécule, traçons une sphère dont le rayon soit égal à la réaction du milieu, et prenons, à partir du centre, une longueur OS égale et opposée à l'intensité du champ (fig. 88).

Une molécule dont l'axe était dirigé primitivement sui-

vant OP est soumise aux deux forces — SO et OP dont la résultante est SP. Si le point S est dans l'intérieur de la sphère, c'est-à-dire si la réaction du milieu est plus grande que l'intensité du champ, les axes des molécules déviées seront encore orientées dans toutes les directions, mais non plus uniformément.

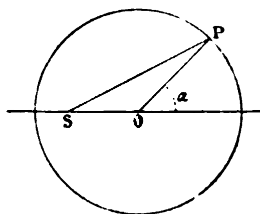


Fig. 88

Si la force du champ est supérieure à la réaction du milieu, le point S est en dehors de la sphère (fig. 89) et les axes des molécules déviées sont tous compris dans le cône TST′ tangent à la sphère.

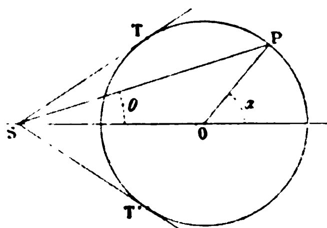


Fig. 89

Soient :

α l'inclinaison primitive de l'axe d'une molécule sur l'axe des x,

θ l'inclinaison finale,

β la déviation $\alpha-\theta$,

R la résultante de la force magnétisante X et de la réaction D du champ.

La condition d'équilibre est

$$mX \sin\theta = mD \sin\beta = mD \sin(\alpha - \theta);$$

on en déduit

$$\text{(11).} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{D\cos\alpha}{X + D\sin\alpha}.$$

428. — La structure du milieu étant symétrique par rapport à l'axe des x, l'intensité d'aimantation est donnée par la somme des projections des moments magnétiques de toutes les molécules sur l'axe des x.

La projection du moment d'une molécule a pour expression $m\cos\theta$; le nombre de celles qui faisaient primitivement l'angle α avec l'axe des x est $\frac{n}{2}\sin\alpha d\alpha$: la résultante est donc

$$I = \int_0^\pi m\cos\theta \frac{n}{2}\sin\alpha d\alpha = -\int_\pi^0 \frac{mn}{2}\cos\theta\sin\alpha d\alpha,$$

ou

$$I = -\frac{M}{2}\int_\pi^0 \cos\theta \sin\alpha d\alpha.$$

Le triangle SOP donne l'équation

$$R^2 = D^2 + X^2 + 2DX\cos\alpha,$$

d'où l'on déduit

$$RdR = -DX\sin\alpha d\alpha.$$

On a d'ailleurs

$$D^2 = R^2 + X^2 - 2RX\cos\theta.$$

En exprimant ainsi les angles α et θ par leurs valeurs en fonction de R, il vient

$$I = \frac{M}{4}\int \frac{R^2 + X^2 - D^2}{X^2 D} dR = \frac{M}{12DX^2}\Big[R(R^2 + 3X^2 - 3D^2)\Big]_{R_1}^{R_2}.$$

Dans le premier cas, où l'on a $X < D$, les limites de l'intégrale sont $R_2 = D + X$ et $R_1 = D - X$.

Dans le second cas, où l'on a $X > D$, les limites de l'intégration sont $R_2 = X + D$ et $R_1 = X - D$.

Toutes réductions faites, il vient alors :

Quand . $X < D$, $I = \frac{2}{3} M \frac{X}{D}$;

— $X = D$, $I = \frac{2}{3} M$;

— $X > D$, $I = M \left[1 - \frac{1}{3} \frac{D^2}{X^2} \right]$;

— $X = \infty$, $I = M$.

D'après cette théorie, l'aimantation est d'abord proportionnelle à la force magnétique jusqu'à ce que celle-ci soit égale à la réaction du milieu, auquel cas l'aimantation atteint les deux tiers de sa valeur maximum. Puis, quand la force magnétique devient plus grande, l'aimantation croît moins rapidement et tend vers une limite finie.

La courbe OL (fig. 90), qui représente cette aimantation en fonction de la force magnétique, est donc formée d'une partie

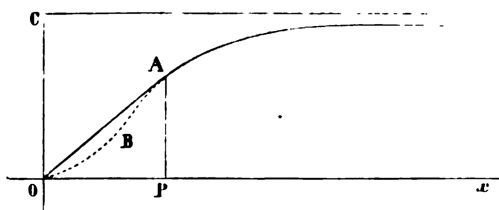


Fig. 90

rectiligne OA qui se prolonge par une courbe AL asymptote à une droite horizontale CD.

429. — Les expériences de Weber lui-même s'accordent avec cette loi d'une manière satisfaisante.

Toutefois les recherches plus récentes ont montré que la valeur de k ne peut pas être considérée comme constante, même pour les petites forces. Ce coefficient va tout d'abord

en croissant d'une manière régulière pour atteindre un maximum et diminuer ensuite.

L'aimantation du fer en fonction du champ doit donc être représentée d'abord par une courbe telle que OBA (fig. 90) ayant un point d'inflexion ; on a confondu souvent cette première partie de la courbe avec la tangente qui passe par l'origine et qui donne pour k la valeur maximum. La théorie de Weber ne rend pas compte de cette variation du coefficient d'aimantation pour les petites forces ; d'autre part, elle n'apprend pas non plus ce que peut être l'aimantation résiduelle.

430. Théorie de Maxwell. — Pour combler cette dernière lacune en restant dans le même ordre d'idées, Maxwell suppose dans le milieu une sorte d'élasticité imparfaite. Il admet que les axes des molécules magnétiques reviennent à leur position primitive, après la suppression de la force magnétique, tant que la rotation qu'elles ont éprouvée reste inférieure à une certaine valeur β_0, mais que ces axes conservent une déviation permanente $\beta - \beta_0$ lorsque la rotation β a été plus grande que la limite inférieure β_0. Cette déviation $\beta - \beta_0$ caractérise l'état permanent de la molécule.

Cette hypothèse ne représente sans doute pas la réalité des phénomènes, mais elle peut en donner une idée approximative et permet de soumettre le problème au calcul.

D'après Maxwell on peut en déduire, par un calcul analogue au précédent, l'aimantation temporaire I et l'aimantation permanente I'. En posant

$$L = D \sin \beta,$$

on obtient ainsi :

Quand $X < L$,

$$I = \frac{2}{3} M \frac{X}{D}, \qquad I' = 0 ;$$

Quand $X = L$,

$$I = \frac{2}{3} M \frac{L}{D}, \qquad I' = 0 ;$$

Pour $L < X < D$,

$$I = M\frac{2X}{3D} + \left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right)\left[\sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{X^2}{D^2} - \frac{L^2}{D^2}}\right],$$
$$I' = M\left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)\left(1 - \frac{L^2}{X^2}\right);$$

Pour $X = D$,

$$I = M\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right], \quad I' = M\left(1 - \frac{L^2}{D^2}\right)^2;$$

Pour $X > D$,

$$I = M\left[\frac{1}{3}\frac{X}{D} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{D}{X} + \frac{(D^2 - L^2)^{\frac{3}{2}}}{6X^2D} - \frac{\sqrt{X^2 - L^2}}{6X^2D}(2X^2 - 3XD + L^2)\right],$$
$$I' = \frac{M}{4}\left[1 - \frac{L^2}{XD} + \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\sqrt{1 - \frac{L^2}{X^2}}\right]^2;$$

Enfin pour $X = \infty$,

$$I = M, \quad I' = \frac{M}{4}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{D^2}}\right)^2.$$

La figure 91 représente la marche du phénomène pour les valeurs particulières : $M = 1000$, $L = 3$, $D = 5$. Les forces magnétisantes sont prises comme abscisses ; les ordonnées de la courbe OAB représentent le magnétisme temporaire, celles de la courbe O'A' le magnétisme résiduel. La première se compose d'abord d'une portion rectiligne correspondant aux valeurs de X comprises entre o et 3, puis elle se relève brusquement et s'approche rapidement de son asymptote. La courbe du magnétisme résiduel ne commence que lorsque X est égal à L; le maximum M' vers lequel elle tend, et qui est figuré par la droite C'D', est égal à 0, 81M.

On doit remarquer que le magnétisme résiduel ainsi calculé correspond au cas où l'aimantation du corps lui-même ne produit qu'une force démagnétisante insensible ; ces résultats

conviennent donc seulement à un corps très allongé aimanté longitudinalement.

Il est difficile d'admettre qu'une courbe discontinue comme celle qui représente le magnétisme temporaire puisse être l'expression exacte du phénomène. On déduit toutefois de cette

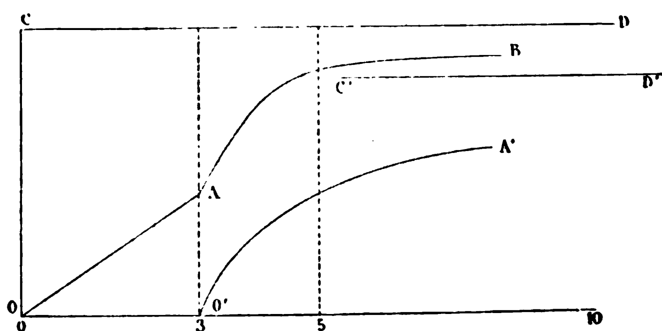


Fig. 91

théorie des conséquences curieuses relatives à l'action successive de forces magnétisantes de signes contraires et qui sont vérifiées par l'expérience.

Supposons qu'une pièce de fer, après avoir été soumise à l'action d'une force X_0, ait acquis une aimantation permanente. Une force nouvelle X_1 de même sens est sans effet tant qu'elle reste inférieure à X_0, et, si elle est plus grande que X_0, le magnétisme résiduel est le même que si la force primitive X_0 n'avait pas agi.

Si la force nouvelle $-X_2$ est de sens contraire, elle produit un effet permanent bien avant qu'elle atteigne X_0; pour une certaine valeur de cette force, l'aimantation résiduelle du fer paraîtra annulée, mais le métal n'est pas à l'état neutre, car il est insensible à l'action d'une force $-X$, tant que X est inférieur à X_2, tandis qu'une force positive plus faible produit une aimantation permanente dans la direction primitive.

431. — M. Jamin donne de ces phénomènes une explication différente. Il admet que l'action du champ sur un barreau se fait sentir à une profondeur plus ou moins grande suivant son intensité. Lorsque l'aimantation apparente est devenue nulle,

le magnétisme n'était pas détruit : il y avait seulement superposition de deux aimantations contraires. Un champ inverse d'intensité inférieure à X_2 n'a aucune action sur la couche superficielle, mais un champ direct d'intensité moindre détermine la formation d'une nouvelle aimantation superficielle dont l'action s'ajoute à celle qui était restée dans les profondeurs.

M. Jamin a vérifié ces idées théoriques en enlevant la couche superficielle d'aimantation inverse et mettant à nu la couche sous-jacente d'aimantation directe. Il y réussit soit par un procédé mécanique, en usant à la meule ou à la lime la surface extérieure de l'aimant, soit par des moyens chimiques, en dissolvant cette surface par un acide.

Il faut remarquer toutefois que cette prédominance des couches superficielles est peut-être un phénomène accidentel particulier à l'acier et tenant simplement à la constitution de ce métal. En effet, lorsqu'il s'agit de barreaux fortement trempés, comme ceux qu'on recherche pour la fabrication des aimants, la trempe est nécessairement très inégale; elle se produit surtout au voisinage de la surface, où le refroidissement est très rapide, de sorte que la force coercitive a son maximum d'action dans les couches superficielles. L'action inductive et la force démagnétisante se manifestent alors dans des conditions toutes différentes de celles qui se présentent pour les corps homogènes.

432. Influence de la température. — Le magnétisme induit par l'action d'un aimant sur lui-même offre peut-être le moyen le plus simple d'expliquer l'influence de la température.

Il est naturel d'admettre que le magnétisme rigide n'est pas altéré par de faibles variations de température, puisque l'aimantation reprend sa valeur primitive quand l'aimant revient lui-même à sa température initiale; on conçoit difficilement que le magnétisme rigide puisse réparer ses pertes, car toutes les actions intérieures tendent à le diminuer. Dans cet ordre d'idées, l'affaiblissement temporaire du magnétisme serait dû simplement à un accroissement du magnétisme induit et, par suite, le coefficient d'aimantation k devrait croître d'abord avec la température.

Pour des températures plus élevées, au-dessus de 100° par exemple, le magnétisme éprouve une diminution définitive : le magnétisme rigide a donc été lui-même altéré. Dans ces conditions on ne peut pas dire si le coefficient d'aimantation continue de croître avec la température, puisque l'affaiblissement est produit par une double cause. Comme le fer et l'acier au rouge vif ne sont même plus attirables à l'aimant, il faut admettre que le coefficient d'aimantation devient alors nul ou du moins extrêmement faible.

Il semble donc que, pour l'acier et le fer, le coefficient d'aimantation doive croître d'abord avec la température pour diminuer ensuite jusqu'à zéro, de manière à passer par un maximum à une température déterminée.

S'il en est ainsi, un barreau aimanté à une température inférieure à celle du maximum doit perdre du magnétisme quand on l'échauffe, et l'inverse doit se produire pour un barreau aimanté à une température supérieure à celle du maximum.

L'expérience montre que les choses se passent ainsi avec le cobalt. Pour le fer et l'acier, les faits connus jusqu'à présent s'accordent en partie avec cette manière de voir ; mais il existe trop peu d'expériences faites dans des conditions bien définies pour qu'on puisse apprécier jusqu'à quel point elle se rapproche de la vérité. Tout porte à croire cependant que les phénomènes réels sont plus complexes.

CHAPITRE SIXIÈME

ÉTAT MAGNÉTIQUE DU GLOBE

433. Méthode de Gauss. — La représentation du magnétisme terrestre par l'hypothèse d'un aimant central ou les hypothèses équivalentes ne constitue qu'une première approximation assez grossière : le problème est en réalité beaucoup moins simple. Gauss l'a traité d'une manière tout à fait générale dans l'hypothèse que les effets observés à la surface terrestre sont dus uniquement à l'action de masses magnétiques.

Quelle que soit la distribution de ces masses, qu'elles soient à l'intérieur du globe ou à l'extérieur, les actions élémentaires s'exerçant en raison inverse du carré de la distance, la force en chaque point est encore déterminée par un potentiel. L'espace qui entoure la terre constitue le champ magnétique du système, et on peut le supposer divisé en tranches par des surfaces de niveau correspondant à des valeurs équidistantes du potentiel. La surface qui correspond à une valeur donnée V peut être formée d'une ou plusieurs nappes ; mais on sait que deux surfaces de potentiels différents ne se coupent pas et que la force, normale en chaque point, est en raison inverse de la distance de deux surfaces consécutives.

434. Parallèles magnétiques. — Un certain nombre de ces surfaces rencontrent le globe terrestre : on appelle *parallèles magnétiques* les lignes d'intersection correspondantes avec la surface de la terre ; ces lignes sont des lignes de niveau. Comme elles appartiennent à la fois à la surface de la terre, supposée sphérique, et à la surface de niveau, elles sont nor-

males en chaque point à la verticale et à la force magnétique; elles sont donc normales au méridien magnétique qui passe par ces deux lignes et, par suite, à l'intersection de ce méridien avec la surface de la terre, c'est-à-dire à la méridienne magnétique. Les parallèles magnétiques forment ainsi à la surface de la sphère terrestre un système orthogonal aux méridiennes magnétiques.

Considérons les parallèles correspondant à deux surfaces de niveau V_1 et V_2 infiniment voisines (fig. 92); soit ds l'arc

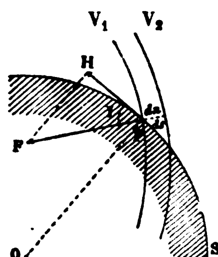


Fig. 92

de la méridienne magnétique compris entre eux et dn la distance normale des deux surfaces au même point. Si l'on appelle F la force magnétique et I l'inclinaison, on a évidemment

$$F = -\frac{dV}{dn} = -\frac{dV}{ds \cos I};$$

on en déduit

$$(1) \qquad F \cos I = H = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

La composante horizontale, normale en chaque point au parallèle magnétique, est donc en raison inverse de la distance de deux parallèles consécutifs; mais la force totale et la composante horizontale ne sont plus nécessairement constantes le long d'un parallèle magnétique, comme cela avait lieu dans la théorie de Biot.

435. Équateur magnétique. — La somme des masses magnétiques étant nulle pour le système total, et aussi séparément

pour chacun des corps aimantés, il existe une surface de niveau pour laquelle on a $V=0$; cette surface coupe le globe terrestre suivant sa ligne neutre s'il est le seul corps magnétique, ou dans le voisinage de cette ligne si les autres corps magnétiques sont suffisamment éloignés.

Le parallèle de potentiel nul s'appelle l'*équateur magnétique:* le long de cet équateur, la force n'est pas constante, elle n'est pas non plus nécessairement horizontale. Dans la théorie de Biot l'équateur, était une ligne d'inclinaison nulle.

L'équateur magnétique sépare à la surface de la terre les points pour lesquels le potentiel est positif de ceux où il est négatif. De part et d'autre de l'équateur, la valeur absolue du potentiel va en croissant d'une manière continue.

436. Pôles magnétiques terrestres. — On donne habituellement le nom de *pôles magnétiques terrestres* aux points de la

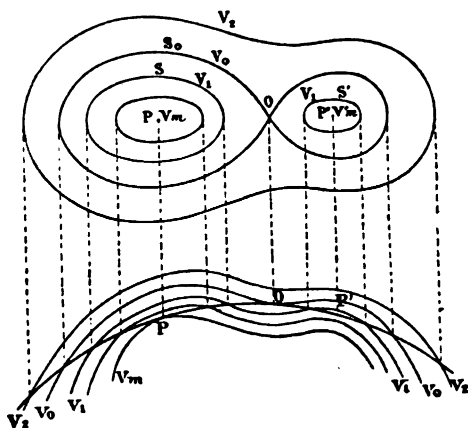


Fig. 93

surface où le potentiel est maximum ou minimum. Un pôle est un point où la surface de niveau devient tangente à la surface de la terre ; la force y est évidemment verticale.

Le nombre des pôles est de deux au minimum, puisqu'il y a au moins deux points où les surfaces de niveausont tangentes à la surface de la sphère ; mais il peut y en avoir un plus grand nombre. Supposons, par exemple, qu'il y ait deux pôles P et P′ (fig. 93) situés dans la région positive, c'est-à-

dire sur l'hémisphère sud. Ces pôles pourraient appartenir à une même surface de niveau qui aurait deux points de contact avec la surface de la sphère : mais, plus généralement, nous les considérerons comme appartenant à deux surfaces de niveau différentes, de potentiels V_m et V'_m, V_m étant plus grand que V'_m.

Puisque les points P et P' sont des points de maximum, le potentiel décroît dans tous les sens autour de chacun d'eux et on peut toujours choisir une valeur V_1 du potentiel, inférieure à V'_m, telle que l'intersection de la surface V_1 avec la sphère donne deux courbes fermées S et S', isolées l'une de l'autre et dont chacune entoure l'un des points ; on peut prendre aussi une valeur V_2 assez petite pour qu'une même courbe d'intersection comprenne les deux points.

En faisant varier le potentiel d'une manière continue de V_1 à V_2, on trouvera une valeur V_0 pour laquelle les deux courbes, précédemment séparées, arriveront au contact, pour se confondre en une seule S_0 ; la réunion pourra se faire, soit par un simple point de croisement comme dans la figure 93, soit par un plus grand nombre de points d'intersection ou de contact. Soit O l'un de ces points. Il est évident d'abord que la composante horizontale y est nulle et que, par suite, le point répond à la définition ordinaire des pôles ; seulement, il est à remarquer que si on s'en écarte on trouve dans certaines directions des potentiels croissants et dans d'autres des potentiels décroissants : pour les premières directions, le point O se comportera comme un pôle sud et, pour les secondes, comme un pôle nord. C'est ce qu'on peut appeler un *faux pôle*.

Ainsi il ne peut y avoir deux pôles distincts dans un même hémisphère, sans qu'il y ait en même temps au moins un faux pôle. Or, les observations ne donnent rien de semblable, et c'est par une interprétation inexacte des phénomènes que l'on a cru quelquefois pouvoir déduire des observations l'existence de deux pôles dans l'hémisphère nord.

Dans le voisinage du pôle, en effet, les parallèles magnétiques ont une forme elliptique ; leurs normales, c'est-à-dire les méridiennes magnétiques, ne concourent pas au même point, mais les points de convergence qu'elles accusent plus

ou moins nettement sont les centres de courbure et n'ont évidemment aucune relation avec les pôles.

L'observation conduit donc à cette conséquence qu'il n'existe, en dehors de circonstances tout à fait accidentelles et locales, que deux pôles magnétiques à la surface de la Terre, un pôle négatif dans l'hémisphère nord et un pôle positif dans l'hémisphère sud.

Il est important d'ajouter aussi que les pôles magnétiques terrestres, tels que nous venons de les définir, n'ont rien de commun avec les pôles magnétiques proprement dits, considérés comme centres de gravité des masses magnétiques positives et négatives. On voit aussi que la corde qui joint les deux pôles magnétiques terrestres ne doit pas être prise pour l'axe magnétique terrestre. L'axe magnétique de la Terre est la droite qui joint les deux centres de gravité dont il vient d'être question; c'est la droite suivant laquelle la somme des projections des moments magnétiques des divers éléments est un maximum (**297**).

437. Propriétés d'un polygone fermé. — On sait que si l'on transporte une masse magnétique égale à l'unité d'un point P_1 où le potentiel est V_1 en un point P_2 où il est V_2, que l'on désigne par F la force, par *ds* l'élément du chemin décrit par la masse et par ε l'angle de la force avec l'élément, le travail magnétique est exprimé par l'équation

$$V_1 - V_2 = \int_{P_1}^{P_2} F ds \cos\varepsilon.$$

Ce travail est indépendant du chemin parcouru, et il est nul toutes les fois que l'on revient sur la surface de niveau primitive en faisant décrire à la masse une courbe fermée quelconque. Supposons que les deux points P_1 et P_2 soient situés à la surface de la Terre et qu'on déplace la masse suivant cette surface; le travail de la composante verticale est nul à chaque instant, l'expression du travail ne dépend que de la composante horizontale H et se réduit à

$$(2) \qquad V_1 - V_2 = \int_{P_1}^{P_2} H ds \cos\varepsilon,$$

l'intégrale du second membre étant nulle, toutes les fois qu'on fait décrire à la masse un circuit fermé.

Cela posé, considérons un polygone de grands cercles passant par les points $P_0, P_1, P_2 \ldots$ (fig. 94). Traçons en ces différents points les méridiennes géographiques P_0M_0, P_1M_1, $P_2M_2, \ldots$ et les méridiennes magnétiques P_0D_0, P_1D_1, $P_2D_2 \ldots$ Soient :

$\delta_0, \delta_1, \delta_2 \ldots$ les déclinaisons comptées positivement du nord vers l'ouest ;

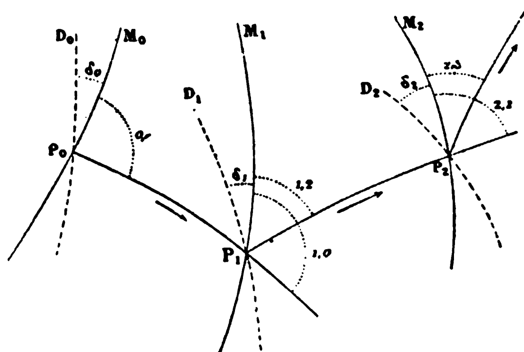


Fig. 94

0.1 l'azimut de l'arc P_0P_1 au point P_0, cet azimut étant compté positivement du nord vers l'est;

1.0 l'azimut de l'arc P_0P_1 au point P_1 compté positivement dans le même sens, etc.;

$\varepsilon_{0.1}, \varepsilon_{1.0}, \ldots$ les valeurs des angles ε en ces différents points.

On a

Au point P_0, $\varepsilon_{0.1} = \delta_0 + 0.1$;

» P_1, $\varepsilon_{1.0} = \delta_1 + 1.0$,

$\varepsilon_{1.2} = \delta_1 + 1.2$;

» P_2, $\varepsilon_{2.1} = \delta_2 + 2.1$,

$\varepsilon_{2.3} = \delta_2 + 2.3$; etc.

Sur le côté P_0P_1 la composante horizontale H n'est constante

ni en grandeur ni en direction ; cependant, si ce côté est très petit par rapport aux dimensions du globe terrestre, on peut admettre que la valeur de H reste constante, égale à la moyenne des valeurs qu'elle a aux points P_0 et P_1, et poser

$$H\cos\varepsilon = \frac{1}{2}(H_0 \cos\varepsilon_{0.1} + H_1 \cos\varepsilon_{1.0}).$$

Le théorème exprimé par l'équation (2) donne alors

$$\int_{P_0}^{P_1} H ds \cos\varepsilon = \frac{P_0P_1}{2}[H_0 \cos(\delta_0 + 0,1) + H_1 \cos(\delta_1 + 1.0)].$$

On aura donc, pour le polygone fermé,

$$(3)\qquad \begin{aligned} 0 = {} & \frac{P_0P_1}{2}[H_0 \cos(\delta_0 + 0.1) + H_1 \cos(\delta_1 + 1.0)] \\ & + \frac{P_1P_2}{2}[H_1 \cos(\delta_1 + 1.2) + H_2 \cos(\delta_2 + 2.1)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{P_nP_0}{2}[H_n \cos(\delta_n + n.0) + H_0 \cos(\delta_0 + 0.n)]. \end{aligned}$$

En appliquant cette équation au triangle formé par les stations de Paris, Göttingue et Milan, et prenant comme inconnue la valeur de H_0 à Paris, Gauss a trouvé par le calcul $H_0 = 0,517$, tandis que l'observation donnait 0,518.

438. Introduction des coordonnées géographiques. — Considérons un point quelconque P à une distance r du centre de la Terre ; soit u (fig. 95) le complément P'D de la latitude et l la longitude CQ comptée vers l'est. Nous décomposerons la force magnétique F au point P en trois autres rectangulaires, l'une Z suivant la verticale et comptée positivement vers le zénith, l'autre X dans le méridien et dirigée vers le nord, la troisième Y dirigée vers l'ouest.

En tenant compte des relations

$$dx = -r du, \qquad dy = -r \sin u dl, \qquad dz = dr,$$

les composantes de la force deviennent

$$(4)\qquad \begin{aligned} X &= -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial u},\\ Y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{r\sin u}\frac{\partial V}{\partial l},\\ Z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial r}. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{X^2+Y^2},\\ \operatorname{tang}\delta &= \frac{Y}{X},\\ F &= \sqrt{X^2+Y^2+Z^2},\\ \operatorname{tang} I &= -\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}. \end{aligned}$$

Fig. 95

Lorsque le point P est à la surface de la Terre en P′, on doit prendre $r=a$ et les équations (4) donnent

$$(5)\qquad \begin{aligned} aX &= \frac{\partial V}{\partial u},\\ aY\sin u &= \frac{\partial V}{\partial l}. \end{aligned}$$

Comme on a d'ailleurs

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial l} = \frac{\partial^2 V}{\partial l \partial u},$$

il vient

$$\frac{\partial X}{\partial l} = \frac{\partial (Y \sin u)}{\partial u},$$

et, par suite,

$$Y \sin u = \int_0^u \frac{\partial X}{\partial l} du + f(l).$$

Pour $u = 0$, c'est-à-dire au pôle Nord, on a $Y \sin u = 0$ et, par suite, $f(l) = 0$. Il vient donc finalement

$$(6) \qquad Y \sin u = \int_0^u \frac{\partial X}{\partial l} du.$$

On est ainsi conduit à ce théorème remarquable de Gauss: *Il suffit de connaître pour tous les points de la surface de la terre la composante horizontale dirigée vers le nord, pour connaître la composante dirigée vers l'ouest et, par suite, la composante horizontale totale.*

439. Expression du potentiel. — Quelle que soit l'aimantation de la Terre, le potentiel extérieur peut être représenté, comme on l'a vu (**369**), par l'expression

$$V = a \left[A_1 \left(\frac{a}{r}\right)^2 + A_2 \left(\frac{a}{r}\right)^3 + \cdots\cdots \right],$$

qui, pour un point situé sur la surface, se réduit à

$$V = a(A_1 + A_2 + \cdots\cdots).$$

On en déduit, pour les composantes de la force magnétique,

$$(7) \qquad \begin{aligned} X &= \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial A_1}{\partial u} + \frac{\partial A_2}{\partial u} + \cdots\cdots, \\ Y &= \frac{1}{a \sin u}\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{1}{\sin u}\left[\frac{\partial A_1}{\partial l} + \frac{\partial A_2}{\partial l} + \cdots\cdots\right]. \\ Z &= -\frac{\partial V}{\partial r} = 2A_1 + 3A_2 + 4A_3 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Les coefficients A_1, A_2, A_3, sont des fonctions des deux angles l et u. A_n s'exprime (**368**) par $2n+1$ termes en sinus et cosinus. Il y aura donc, si l'on veut représenter l'état de la Terre par une série de cette forme, 3 coefficients numériques à déterminer pour A_1, 5 pour A_2, 7 pour A_3, etc.

Gauss a trouvé que, dans l'état des déterminations magnétiques connues, il était inutile de pousser le développement au delà du quatrième terme, de sorte qu'il reste alors vingt-quatre coefficients numériques à calculer.

Chaque point de la surface fournit trois équations par les valeurs des composantes X, Y, Z; il suffirait donc de connaître ces trois éléments en huit points quelconques du globe pour obtenir la solution complète du problème. Pour éviter les erreurs provenant des termes négligés et des observations inexactes, Gauss a appliqué la méthode des moindres carrés aux données relatives à quatre-vingt-quatre points pris, pour faciliter les calculs, sur douze méridiens équidistants et sept parallèles. Les résultats obtenus ont été ensuite appliqués à quatre-vingt-dix-neuf autres points.

Les formules calculées par Gauss assignent aux deux pôles les positions suivantes pour l'année 1838:

Pôle N.	latitude	70° 35′	longit.	262° 01′ E,
Pôle S.	»	78° 35′	»	150° 10′ E;

ils sont loin, comme on voit, de correspondre aux extrémités d'un même diamètre.

Quant à l'axe magnétique vrai, déterminé par la condition que la somme des projections des moments soit un maximum, il est parallèle au diamètre terrestre qui correspond au point de l'hémisphère nord dont la latitude est de 77° 50′ et la longitude 294° 09′. Sa direction ne coïncide pas exactement avec la ligne des pôles.

Cette direction est celle pour laquelle le coefficient A_1 a sa valeur maximum (**370**). Quant au moment magnétique de la Terre, il est égal à a^3K. En comparant ce moment à celui d'un barreau d'acier qui pesait environ 500^{gr} et qui avait servi à la détermination absolue du magnétisme terrestre, Gauss a trouvé

qu'il est environ 8.10^{21} fois plus grand. Si on suppose la Terre aimantée uniformément, on déduit de ce nombre que le moment magnétique de chaque mètre cube du globe terrestre est le même que celui de huit barreaux comme celui de Gauss. En admettant que l'aimantation du barreau fût aussi uniforme, son intensité d'aimantation serait environ 2200 fois celle du globe terrestre.

440. Le magnétisme terrestre est-il seulement intérieur? — Remarquons que si les masses agissantes se trouvaient en partie à l'intérieur, et en partie à l'extérieur, le potentiel pourrait être exprimé par la somme de deux séries

$$V = A_1\left(\frac{a}{r}\right)^2 + A_2\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \cdots\cdots + A_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \cdots\cdots$$
$$+ B_1\left(\frac{r}{a}\right)^2 + B_2\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \cdots\cdots + B_n\left(\frac{r}{a}\right)^n \cdots\cdots,$$

la première relative aux masses intérieures, la seconde relative aux masses extérieures. En désignant par V_n le terme général du développement, on aurait donc

$$V_n = A_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + B_n\left(\frac{r}{a}\right)^n;$$

on en déduit

$$\frac{dV_n}{dr} = -\frac{n+1}{r}A_n\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} + \frac{n}{a}B_n\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}.$$

Pour un point de la surface, on a simplement

$$(8)\qquad \begin{aligned} V_n &= A_n + B_n, \\ \frac{dV}{dr} &= -\frac{n+1}{a}A_n + \frac{n}{a}B_n. \end{aligned}$$

La composante verticale

$$Z = -\frac{dV}{dr} = -\left(\frac{dV_1}{dr} + \frac{dV_2}{dr} + \cdots\right) = -(Z_1 + Z_2 \cdots + Z_n \cdots)$$

a pour terme général

$$(9) \qquad Z_n = \frac{1}{a}[nB_n - (n+1)A_n].$$

Cette équation, combinée à la précédente (8), donne

$$B_n = \frac{1}{2n+1}[aZ_n + (n+1)V_n], \qquad A_n = \frac{1}{2n+1}[nV_n - aZ_n];$$

et on peut séparer ainsi l'effet dû aux masses intérieures de celui que produisent les masses intérieures.

Les calculs de Gauss ayant montré qu'on satisfait aux observations au moyen des seuls coefficients A, il en résulte que les coefficients B sont sensiblement nuls; par suite, aucune part sensible de l'action terrestre ne paraît due aux masses magnétiques extérieures.

441. Influence du Soleil et de la Lune. — Toutefois certaines variations périodiques des éléments du magnétisme terrestre paraissent liées aux mouvements apparents du Soleil et de la Lune, ou dépendre de certains phénomènes accessoires tels que les taches du Soleil. L'influence de ces astres ne paraît donc pas douteuse; tout porte à croire cependant qu'ils n'agissent pas directement, en tant que corps magnétiques, mais que leur influence est indirecte et modifie seulement l'état magnétique du globe terrestre.

Un astre, en effet, quelle que soit la distribution du magnétisme qu'il possède, équivaut, pour les points très éloignés, à un aimant infiniment petit ou à une sphère aimantée uniformément.

Désignons par :

- I l'intensité moyenne d'aimantation de la Terre;
- R son rayon;
- I′ l'intensité moyenne d'aimantation d'un astre;
- R′ son rayon;
- ϖ' son moment magnétique;
- D sa distance à la Terre.

L'action de la Terre à l'équateur, où elle est minimum, a pour valeur (152)

$$T_e = \frac{\varpi}{R^3} = \frac{4}{3}\pi I.$$

Si l'on suppose que la ligne des pôles de l'astre considéré soit dirigée vers la Terre, ce qui est le cas le plus favorable, la force F_p qu'il exercera sur la Terre sera (152)

$$F_p = 2\frac{\varpi'}{D^3} = 2.\frac{4}{3}\pi I' \left(\frac{R'}{D}\right)^3.$$

Le rapport de l'action polaire de l'astre considéré à l'action équatoriale de la Terre est

$$\frac{F_p}{T_e} = 2\frac{I'}{I}\left(\frac{R'}{D}\right)^3 = \frac{1}{4}\frac{I'}{I}\left(\frac{2R'}{D}\right)^3.$$

Ce rapport est donc proportionnel à l'aimantation de l'astre et au cube de son diamètre apparent.

Le diamètre apparent du Soleil et celui de la Lune sont d'environ 30′, c'est-à-dire plus petits que 0,01, de sorte que l'on a

$$\frac{F_p}{T_e} < \frac{1}{4}\frac{I'}{I}10^{-6}.$$

Si ces astres sont aimantés comme la Terre, la variation maximum qu'ils peuvent produire à l'équateur sur la déclinaison est donc inférieure à $\frac{10^{-6}}{4}$ ou $\frac{1''}{20}$, c'est-à-dire absolument inappréciable. Pour arriver à des variations de 10′, comme celles qu'on observe fréquemment, il faudrait que l'intensité d'aimantation du Soleil et de la Lune fût 12000 fois plusgrande que celle de la Terre. Or, l'acier le plus énergiquement aimanté n'a pas une intensité 10000 fois plus grande que celle

de la Terre; le Soleil et la Lune devraient donc, pour produire une perturbation de 10′, avoir une aimantation plus énergique que celle des meilleurs barreaux d'acier.

On arriverait aux mêmes conclusions en supposant que la Lune, par exemple, est aimantée par la Terre. Si la Lune est à l'équateur, l'action qu'elle subit de la Terre est

$$f=\frac{4}{3}\pi I\left(\frac{R}{D}\right)^3,$$

et l'intensité d'aimantation a pour valeur

$$I'=kf=\frac{4}{3}\pi I k\left(\frac{R}{D}\right)^3.$$

On en déduit

$$\frac{I'}{I}=k\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{D}\right)^3=k\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{60}\right)^3=\frac{k}{54\,000}.$$

Quelque valeur que l'on admette pour le coefficient k, en supposant même qu'on assimile la Lune au fer le plus doux, le rapport des aimantations sera toujours très petit et la réaction de la Lune sur la Terre absolument négligeable. A plus forte raison en serait-il de même pour le Soleil.

